11

حكومة إقليم كوردستان ـ العراق
وزارة التربية ـ المديرية العامة للمناهج والمطبوعات

# الرياضيات للجميع

## كتاب الطالب

## الصف الحادي عشر الأدبي

الطبعة السابعة
٢٠١٥م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ

الأشراف الفني على الطبع

عثمان پيرداود كواز

آمانج اسماعيل عبدي

# محتوى الكتاب

## 1 Statistics andProbability الإحصاء والاحتمال

1 مقاييس النزعة المركزية
Measures of central Tendency ........ 2

2 مقاييس التشتت
Measures of Dispersion ........ 10

3 قوانين الاحتمال
Laws of probability ........ 15

4 تقنيات العد
Counting techniques ........ 23

## 2 Functions الدوال

1 الدوال Functions ........ 32

2 الدوال الخطية Linear Functions ........ 40

3 الصور المختلفة لمعادلة المستقيم
Various forms of the equation of a line ........ 46

4 توازي المستقيمات وتعامدها
Parallel and Perpendicular Lines ........ 52

5 الدوال التربيعية Quadratic Functions ........ 57

## 3 Systems Of Linear Equations أنظمة المعادلات الخطية

1 حل الأنظمة الخطيَّة بالتعويض
Solving Linear Systems by Substitution ........ 66

2 حل الأنظمة الخطية بالحذف
Solving Linear Systems by Elimination ........ 72

3 حل أنظمة المعادلات الخطية بيانيًّا
Solving Linear Systems Graphically ........ 77

## 4 أنظِمةُ المُتبايناتِ الخَطيَّة Systems of Linear Inequalities

1 المتباينات الخطيّة بمجهول واحد
Inequalities ........ 84
2 المتباينات الخطية بمجهولين
Linear inqualities in two unknowns ........ 90
3 أنظمة المتباينات الخطيّة
Systems of Linear Inequalities ........ 98

## 5 المصفوفات Matrices

1 المصفوفات Matrices ........ 104
2 المحددات وقاعدة كريمر Determinants and Cramer's Rule ........ 112

## 6 التفاضل Differential

1 المشتقة الأولى Derivative $1^{st}$ ........ 119
2 المشتقة الثانية Derivative $2^{nd}$ ........ 126
3 تطبيقات الاشتقاق Applications of Derivative ........ 133

# الإحصاء والاحتمال

## Statistics and Probability

يُمكنك استعمال الإحصاء والاحتمال، لتحليل معطيات تتعلَّق بالانتظار في رتل واستنتاج خلاصات تتعلّق بمدة الانتظار.

### الدروس

1. مقاييس النزعة المركزية
2. مقاييس التشتُّت
3. قوانين الاحتمال
4. تقنيات العد

يُمكنك استعمال الإحصاء والاحتمال، لتحليل معطيات تتعلَّق بالانتظار في رتل واستنتاج خلاصات تتعلّق بمدة الانتظار.

مدة الانتظار المقدرة ابتداء من هذه النقطة، هي 4872 دقيقة

# مقاييس النزعة المركزية
# Measures of central Tendency

**الأهداف**

- يجد قياسات النزعة المركزية لمجموعة معطيات

**المفردات**
**Vocabulary**

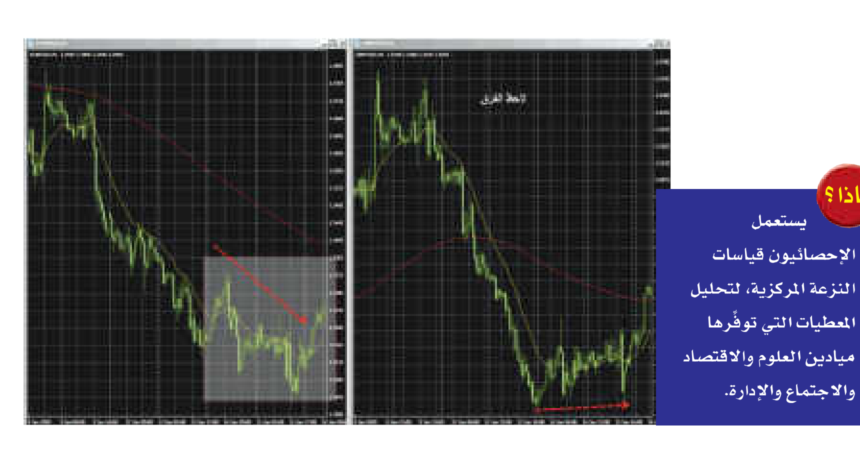
التكرار التراكمي الصاعد
Increasing cumulative frequency

التكرار التراكمي النازل
Decreasing Cumulative frequency

المتوسِّط
Mean

الوسيط
Median

المنوال
Mode



**لماذا؟**

يستعمل الإحصائيون قياسات النزعة المركزية، لتحليل المعطيات التي توفّرها ميادين العلوم والاقتصاد والاجتماع والإدارة.

تعلَّمت من قبل كيف تجد المتوسِّط والوسيط والمنوال لمجموعة معطيات، وهي قياسات إحصائية تساعد على وصف هذه المجموعة مركزيًّا.

تذكَّر

- أن المتوسِّط **Mean** قياس يُلخِّص مجموعة المعطيات. فأن تقول أن متوسِّط علامات طلاب الصف الحادي عشر في الرياضيات كان 70 من مئة، يدل على أن هذه العلامات كانت جيدة بالمجمل. لإيجاد المتوسِّط، اجمع معطيات المجموعة واقسِم المجموع على عدد المعطيات.
- أن الوسيط **Median** قياس يدل على مركز معطيات المجموعة بعد ترتيبها صعودًا أو نزولاً. فأن تقول أن وسيط علامات طلاّب الصف الحادي عشر في الرياضيات كان 65 من مئة يعني أن هذه العلامة تقسم العلامات التي حصل عليها الطلاب، بعد ترتيبها صعودًا أو نزولاً، إلى نصفين. لإيجاد الوسيط، ما عليك سوى ترتيب المعطيات صعودًا أو نزولاً والنظر إلى المُعطى الواقع في الوسط. إذا كان عدد المعطيات فرديًّا يكون هناك معطى واحد في الوسط. هذا المعطى هو وسيط المجموعة . أما إذا كان عدد المعطيات زوجيًّا، يكون هناك معطيان وسطيان. وسيط المجموعة هو متوسِّط هذين المعطيين.
- أن المنوال **Mode** قياس يُبيّن القيم الأكثر تردُّدًا في مجموعة المعطيات. لإيجاد المنوال، أنشئ الجدول التكراري لمجموعة المعطيات، وهو جدول من صفين. يضم صفه الأول معطيات المجموعة من دون تكرار، ويضم الصف الثاني، وتحت كل معطى، عدد المرات التي يتكرَّر فيها. المنوال هو المعطى الأكثر تكرارً.
- أن لكل مجموعة معطيات متوسِّطًا وحيدًا ووسيطًا وحيدًا، وأن من الممكن أن يكون لها أكثر من منوال، أو لا يكون لها منوال على الإطلاق.

**مثـــال 1** **إيجاد مقاييس النزعة المركزية**

جِد المتوسِّط والوسيط والمنوال لمجموعة المعطيات: $\{8,2,3,4,2,5,3,4,5,2,3,4\}$

المتوسِّط: $\overline{x} = \frac{8+2+3+4+2+5+3+4+5+2+3+4}{12} = \frac{15}{4} = 3.75$

الوسيط: ابدأ بترتيب المعطيات صعودًا، مثلاً. $2,2,2,3,3,\boxed{3,4},4,4,5,5,8$ . تجد أن عدد المعطيات زوجي، خذَ المعطيَيْن الواقعَين في الوسط وهما 3 وَ 4، واحسب متوسطَّهما. هذا المتوسِّط هو $3.5 = \frac{3+4}{2}$ . وسيط المجموعة هو 3.5 .

المنوال: أنشئ الجدول التكراري لمعطيات المجموعة:

| القيمة | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 |

للمجموعة 3 منوالات، هي 2 وَ 3 وَ 4.

**حـــاولْ** **جد المتوسِّط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.**

**1** أ $\{6,9,3,8\}$ **1** ب $\{2,5,6,2,6\}$

عند تحليل معطيات إحصائية مُجمّعة في فئات، غالبًا ما تحتاج إلى ترتيب هذه المعطيات صعودًا أو نزولاً، وتحديد مجاميعها الجزئية. يستعمل الإحصائيون لهذه الغاية **الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل.**

**الجدول التكراري التراكمي الصاعد** هو جدول من 3 أعمدة، يضم الأول منها الفئات مرتَّبة صعودًا، ويضم الثاني، ومقابل كل فئة، تكرارها، بينما يضم الثالث مجموع تكرار هذه الفئة وتكرارات الفئات التي تسبقها.

**الجدول التكراري التراكمي النازل** هو جدول من 3 أعمدة يضم الأول منها الفئات مرتَّبة صعودًا، ويضم الثاني، ومقابل كل فئة، تكرارها، بينما يضم الثالث الفرق بين مجموع التكرارات ومجموع تكرارات الفئات التي تسبقها.

**مثـــال 2** **إنشاء الجداول التكرارية التراكمية**

يُبيّن الجدول توزيع أعضاء نادي الشطرنج في الحي الشرقي وفقًا لأعمارهم. أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل.

| الفئةالعمرية | [10,12[ | [12,14[ | [14,16[ | [16,18[ | [18,20[ | [20,22[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 30 | 40 | 50 | 60 | 40 | 20 |

أ التكرار التراكمي الصاعد

| الفئة | التكرار | التكرار التراكمي الصاعد |
|---|---|---|
| [10,12[ | 30 | 30 |
| [12,14[ | 40 | 70 |
| [14,16[ | 50 | 120 |
| [16,18[ | 60 | 180 |
| [18,20[ | 40 | 220 |
| [20,22[ | 20 | 240 |

ب التكرار التراكمي النازل

| الفئة | التكرار | التكرار التراكمي النازل |
|---|---|---|
| [10,12[ | 30 | 240 |
| [12,14[ | 40 | 210 |
| [14,16[ | 50 | 170 |
| [16,18[ | 60 | 120 |
| [18,20[ | 40 | 60 |
| [20,22[ | 20 | 20 |

يساعدك الجدول التكراري التراكمي الصاعد على الإجابة عن أسئلة مثل: ما عدد الأعضاء الذين يقل عمرهم عن 20 سنة؟ ويساعد الجدول التكراري التراكمي النازل على الإجابة عن أسئلة مثل: ماعدد الأعضاء الذين لا يقل عمر كل منهم عن 20 سنة؟ وتساعد كتابة هذين الجدولين على الصورة المبينة في الجدولين أدناه على الإجابة على مثل هذه الأسئلة.

| الفئة | التكرار | التكرار التراكمي الصاعد |
|---|---|---|
| أقل من 12 | 30 | 30 |
| أقل من 14 | 40 | 70 |
| أقل من 16 | 50 | 120 |
| أقل من 18 | 60 | 180 |
| أقل من 20 | 40 | 220 |
| أقل من 22 | 20 | 240 |

| الفئة | التكرار | التكرار التراكمي النازل |
|---|---|---|
| 10 أو أكثر | 30 | 240 |
| 12 أو أكثر | 40 | 210 |
| 14 أو أكثر | 50 | 170 |
| 16 أو أكثر | 60 | 120 |
| 18 أو أكثر | 40 | 60 |
| 20 أو أكثر | 20 | 20 |

**حـــاولْ** أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة في فئات، والتي يُبيّنها الجدول التالي:

| الفئة | [30,40[ | [40,50[ | [50,60[ | [60,70[ | [70,80[ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 10 | 15 | 12 | 8 |

لحساب متوسِّط مجموعة معطيات مجمَّعة في فئات، أنشئ جدولاً من صفّين يتضمّن أوَّلهما مراكز مختلف الفئات، بينما يتضمن الثاني، وتحت كل مركز، تكرار الفئة التي يعود إليها المركز. ثم احسبْ متوسِّط الجدول التكراري الذي حصلت عليه. كذلك حدِّدْ، في المعطيات المجمَّعة إلى فئات، الفئة أو الفئات المتوالية، باعتبارها الفئة أو الفئات الأكثر تكرارًا. غير أن تحديد وسيط معطيات مجمَّعة في فئات ليس بالأمر السهل. سوف تتعلّم في هذا الدرس كيف تقوم بذلك بيانيًّا وجبريًّا.

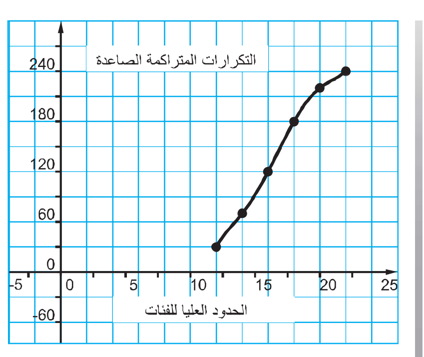
لإيجاد الوسيط بيانيا، مثِّل الجدول التكراري التراكمي الصاعد ببيان يُسمّى **المنحنى التراكمي الصاعد**، ومثِّل الجدول التكراري التراكمي النازل ببيان يُسمّى **المنحني التراكمي النازل**. عندئذ يكون وسيط مجموعة المعطيات الإحداثي الأول لنقطة تقاطع البيان الذي رسمته مع المستقيم الأفقي $y=m$ ، حيث يمثِّل $m$ نصف التكرار التراكمي الأكبر.

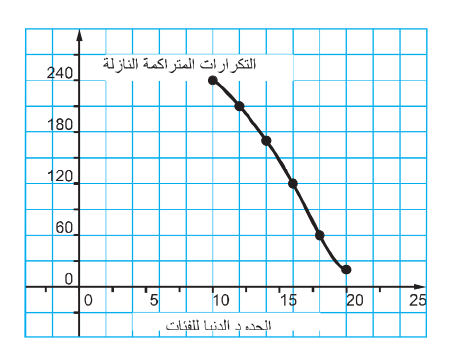
لإنشاء **المنحني التراكمي الصاعد**، خصِّص المحور الأول للحدود العليا للفئات، والمحور الثاني لتكراراتها، بحيث تتمثّل كل فئة بنقطة: إحداثيّها الأول هو حدّها الأعلى وإحداثيّها الثاني هو تكرارها. ثم ارسم منحنيًا مناسبًا يصل بين النقاط.

لإنشاء **المنحني التراكمي النازل**، خصِّص المحور الأول للحدود الدنيا للفئات، والمحور الثاني لتكراراتها، بحيث تتمثَّل كل فئة بنقطة: إحداثيّها الأول هو حدها الأدنى، وإحداثيّها الثاني هو تكرارها. بعد ذلك، ارسم منحنيًا مناسبًا يصل بين النقاط.

**مثـــــال** 3 **إنشاء المنحنيات التراكمية**

**أنشئ المنحني التراكمي الصاعد والمنحني التراكمي النازل لمعطيات المثال 2.**




**حـــاولْ** أنشئ المنحنى التراكمي الصاعد والمنحنى التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة في فئات، والتي يُبيِّنُها الجدول التالي:

| الفئة | $[20,25[$ | $[25,30[$ | $[30,35[$ | $[35,40[$ | $[40,45[$ | $[45,50[$ | $[50,55[$ | $[55,60[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 4 | 5 | 7 | 12 | 8 | 7 | 5 |

سوف تستعمل الآن المنحنى التراكمي الصاعد أو المنحنى التراكمي النازل لتحديد وسيط مجموعة معطيات مجمَّعة في فئات. قم، من أجل ذلك، بالخطوات التالية:

1. إنشاء الجدول التكراري التراكمي الصاعد أو النازل.
2. إنشاء المنحنى التراكمي الصاعد أو النازل.
3. إنشاء المستقيم $y=m$ حيث يمثِّل $m$ نصف التكرار التراكمي الأكبر.
4. تحديد الإحداثي الأول لنقطة تقاطع المنحنى التراكمي الصاعد أو النازل مع المستقيم.

**مثــــــال** 4 **تحديد الوسيط بيانيًا**

جِد الوسيط للمعطيات التالية

| الفئة | $[30,40]$ | $[40,50]$ | $[50,60]$ | $[60,70]$ | $[70,80]$ | $[80,90]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 9 | 15 | 22 | 25 | 18 | 11 |

الجدول التكراري التراكمي الصاعد

| الفئة | التكرار | التكرار التراكمي الصاعد |
|---|---|---|
| $[30,40]$ | 9 | 9 |
| $[40,50]$ | 15 | 24 |
| $[50,60]$ | 22 | 46 |
| $[60,70]$ | 25 | 71 |
| $[70,80]$ | 18 | 89 |
| $[80,90]$ | 11 | 100 |

البيان التراكمي الصاعد والمستقيم $y=m$

التكرارات المتراكمة الصاعدة

$y=\frac{100}{2}=50$

الحدود العليا للفئات

يبدو أن الوسيط يساوي تقريبًا 61.

**حــاولْ** جِد الوسيط للمعطيات التالية:

| الفئة | $[40,50]$ | $[50,60]$ | $[60,70]$ | $[70,80]$ | $[80,90]$ | $[90,100[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 30 | 50 | 80 | 100 | 70 | 10 |

يُمكنك أيضًا أن تحدِّد الوسيط لمجموعة معطيات مجمَّعة في فئات باستعمال الجبر. للقيام بذلك:

1. أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد.
2. حدِّد الفئة التي ينتمي إليها نصف التكرار التراكمي الأخير. تُسمّى هذه الفئة **الفئة الوسيطة**.
3. احسب الوسيط $M$ باستعمال القانون:

$$M = A + \left( \frac{\frac{\sum F_1}{2} - F_2}{F_3} \right) \times L$$

حيث يمثِّل:

- $A$ الحد الأدنى للفئة الوسيطية.
- $\frac{\sum F_1}{2}$ التكرار التراكمي الأكبر.
- $F_2$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الفئة الوسيطية.
- $F_3$ تكرار الفئة الوسيطيه.
- $L$ مدى الفئة.

**مثـــــال** 5 **تحديد الوسيط جبريًا**

جِد الوسيط لمعطيات المثال 4.

الحل: أنشئ الجدول التكراري المتجمع الصاعد

| الفئات | التكرار $F$ | التكرار المتجمع الصاعد $F'$ |
|---|---|---|
| $[30,40[$ | 9 | 9 |
| $[40,50[$ | 15 | 24 |
| $[50,60[$ | 22 | 46 |
| $[60,70[$ | 25 | 71 |
| $[70,80[$ | 18 | 89 |
| $[80,90[$ | 11 | 100 |
| المجموع | $\sum F = 100$ | |

$$\sum \frac{F}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

- وهي رتبة الوسيط في العمود الثالث بين 71 و 46. أي أن الحد الأدنى للفئة الوسيطية
- $A = 60$
- $F_2 = 46$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الفئة الوسيطية
- $F_3 = 25$ تكرار الفئة الوسيطية.
- $L = 10$ طول الفئة.

ينتج من ذلك: $M = 60 + \left(\frac{50-46}{25}\right) \times 10 = 61.6$

تؤكِّد هذه النتيجة معقولية جواب المثال السابق (61 تقريبًا) الذي تم تحديده بيانيًّا.

**حــاولْ** جِد جبريًّا وسيط المعطيات التالية:

| الفئة | $[12,15[$ | $[15,18[$ | $[18,21[$ | $[21,24[$ | $[24,27[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 30 | 50 | 80 | 100 | 70 |

# التمـــــاريــــــن

## التواصل في الرياضيات

1 أيّ من مقاييس النزعة المركزية الثلاثة لمجموعة من المعطيات مجمَّعة في فئات، هو الأصعب تحديدًا؟ وضِّح جوابك.

2 افترض أنك حذفت من مجموعة المعطيات الفئة الأولى والفئة الأخيرة، هل يتغيّر الوسيط؟ علِّل جوابك بإعطاء مثال.

3 اكتب مجموعة معطيات غير مجمعّة، حيث المتوسِّط والوسيط متساويان.

## تمارين موجّهة

**جد المتوسط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.**

4 $\{5,7,4,7,6,7\}$

5 $\{10,14,18,22,26\}$

6 أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل العائدَيْن إلى المعطيات التالية:

| الفئة | [20,25[ | [25,30[ | [30,35[ | [35,40[ | [40,45[ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 11 | 16 | 19 | 14 | 5 |

7 أنشئ المنحني التراكمي الصاعد والمنحني التراكمي النازل العائدَيْن إلى المعطيات التالية:

| العمر | [8,10[ | [10,12[ | [12,14[ | [14,16[ | [16,18[ | [18,20[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 80 | 110 | 100 | 60 | 30 | 20 |

8 يتضمّن الجدول أدناه علامات 24 طالبًا في امتحان مادة الرياضيات. جِد بيانيًّا قيمة تقريبيَّة للوسيط.

| الفئة | [5,10[ | [10,15[ | [15,20[ | [20,25[ | [25,30[ | [30,35[ | [35,40[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 6 | 3 | 1 | 3 | 5 | 4 |

9 جد جبريًّا متوسِّط مجموعة المعطيات التالية:

| العمر | [20,25[ | [25,30[ | [30,35[ | [35,40[ | [40,45[ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 11 | 16 | 19 | 14 | 5 |

## تمارين وتطبيقات

**جِد المتوسِّط والوسيط والمنوال لكل مجموعة معطيات.**

10 $\{4,16,25,9,36,49\}$

11 $\{5,10,15,20,25\}$

**12** أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل العائدين إلى المعطيات التالية:

| الفئة | [28,30[ | [30,32[ | [32,34[ | [34,36[ | [36,38[ | [38,40[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 2 | 3 | 9 | 12 | 1 | 5 |

**13** أنشئ المنحني التراكمي الصاعد والمنحني التراكمي النازل، العائدَيْن إلى المعطيات التالية:

| العمر | [30,35[ | [35,40[ | [40,45[ | [45,50[ | [50,55[ | [55,60[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 80 | 110 | 100 | 60 | 30 | 20 |

**14** يتضمن الجدول أدناه أعمار 275 عامل في أحد المصانع. جِد بيانيًّا قيمة تقريبية للوسيط.

| الفئة | [20,25[ | [25,30[ | [30,35[ | [35,40[ | [40,45[ | [45,50[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| العدد | 45 | 65 | 75 | 44 | 34 | 12 |

**15** يُبيّن الجدول أدناه متوسِّط استهلاك الشخص الواحد للبيض في إحدى المدن خلال فصل الشتاء، بالاستناد إلى استقصاء شمل 380 شخصًا. جِد الوسيط جبريًّا.

| الفئة | [3,7[ | [7,11[ | [11,15[ | [15,19[ | [19,23[ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 10 | 100 | 200 | 50 | 20 |

**16** **تفكير ناقد** تعلَّمت أن القيمة التقريبية المقبولة لوسيط مجموعة، تتألّف من عدد زوجي من المعطيات غير المجمَّعة، هي متوسِّط القيمتَيْن الوسطيتَيْن. هل يُعدّ متوسِّط الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة الوسيطة قيمة تقريبية مقبولة لوسيط مجموعة من المعطيات المجمَّعة في فئات؟ استعمل معطيات المثال 5 لدعم جوابك.

**17** يُبيّن الجدول أدناه درجات طلاب الصف الحادي عشر في اختبار الرياضيات للفصل الأول.

| 80 | 60 | 90 | 20 | 65 | 40 | 60 | 35 | 70 | 35 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 65 | 35 | 70 | 45 | 80 | 65 | 50 | 60 | 15 | 30 |
| 35 | 15 | 40 | 10 | 20 | 20 | 70 | 55 | 85 | 40 |

أ أنشئ جدولاً تكراريًّا بتجميع معطيات الجدول في فئات مدى كل منها 10، بما فيها الفئة [0,10[.

ب أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة.

ج جد متوسِّط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين المتوسِّطَيْن.

د حدِّد المنوال أو المنوالات قبل تجميع المعطيات، وحدِّد الفئة أو الفئات المنوالية بعد التجميع.

هـ جِد وسيط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين الوسيطَيْن.

**18** فيما يلي الأطوال بالسنتيمتر لطلاب الصف الحادي عشر:

179; 187; 181; 175; 175; 173; 172; 172; 175; 169; 167; 164; 171
173; 177; 178; 175; 185; 181; 172; 171; 177; 175; 175; 173; 178
168; 172; 174; 182; 178; 167; 168; 172; 174

أ أنشئ جدولاً تكرارياً بتجميع معطيات الجدول في فئات مدى كل منها 5cm.

ب أنشئ الجدول التكراري التراكمي الصاعد والجدول التكراري التراكمي النازل للمعطيات المجمَّعة.

ج جد متوسط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين المتوسِّطَيْن.

د حدِّد المنوال أو المنوالات قبل تجميع المعطيات وحدد الفئة أو الفئات المنوالية بعد التجميع.

هـ جِد وسيط هذه المعطيات قبل التجميع وبعده. قارن بين الوسيطَيْن.

## نظرة إلى الوراء

**19** يُظهر الجدول المقابل درجات طلاب الصف الحادي عشر في اختبار الرياضيات. جِد:

أ العلامة العليا.

ب العلامة الدنيا.

ج متوسِّط العلامات.

د وسيط العلامات.

هـ منوال العلامات.

| 85 | 75 | 96 | 88 | 72 |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 78 | 87 | 80 | 98 |
| 93 | 88 | 82 | 87 | 80 |
| 83 | 98 | 97 | 84 | 92 |

## نظرة إلى الأمام

**20** يُبيِّن الجدول المقابل النقاط التي سجَّلها لاعبان في فريق كرة السلَّة في 5 مباريات.

أ جد متوسِّط عدد النقاط في المباراة التي سجَّلها كل لاعب.

ب أي من اللاعبين كان أكثر ثباتًا في تسجيل النقاط؟ علِّل جوابك.
هل تساعدك معرفة متوسِّط النقاط لكل لاعب في المباراة على تحديد اللاعب الأكثر ثباتًا في تسجيل النقاط؟ علِّل جوابك.

| أمير | أحمد |
|---|---|
| 20 | 15 |
| 20 | 25 |
| 18 | 30 |
| 22 | 10 |
| 20 | 20 |

# مقاييس التشتت Measures of Dispersion

**لماذا؟**

تعلمت في الدرس السابق أن قياسات النزعة المركزية لمجموعة معطيات توفّر وصفا لها. إلا أن هذه القياسات لا تكفي لتقديم وصف واف للمعطيات. لذا يلجأ الإحصائيون إلى قياسات أخرى، هي قياسات التشتُّت.

**الأهداف**

- يجد قياسات التشتُّت لمجموعة معطيات جبريًّا، وباستعمال الحاسبة البيانية

**المفردات Vocabulary**

التباين Variance

الانحراف المعياري Standard deviation

إذا أخذت مجموعتي المعطيات $\{19,20,21\}$ وَ $\{0,20,40\}$ وحسبت المتوسّط والوسيط لكل منهما. لوجدت أن لهما المتوسّط نفسه والوسيط نفسه. غير أنهما مختلفتان: فمعطيات المجموعة الأولى تتجمَّع حول المتوسّط، بينما تعاني معطيات الثانية من تشتُّت كبير.

تذكّر

- أن **التباين Varience** قياس من قياسات التشتُّت يُرمز إليه بالرمز $\sigma^2$. التباين هو متوسّط تربيعات الفروق بين مختلف المعطيات $x_i$ ومتوسّط معطيات المجموعة $\bar{x}$. أي أن:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2\right)$$

حيث يمثِّل $n$ عدد المعطيات

- أن **الانحراف المعياري Standard deviation** قياس من قياسات التشتُّت، ويُرمز إليه بالرمز $\sigma$. الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي الموجب للتباين.
- أنه كلما صغرت قيمة الانحراف المعياري كانت المعطيات أقلّ تشتُّتًا، أي أنها تتجمّع بأكثريتها قرب المتوسّط، مما يجعله أكثر تعبيرًا عن مجموعة المعطيات. وبالمقابل كلما صغرت قيمة الانحراف المعياري كانت المعطيات أكثر تشتُّتًا، وهي تتباعد عن المتوسّط مما يجعله أقلّ تعبيرًا عن مجموعة المعطيات.

**مثـــال 1** **إيجاد التباين والانحراف المعياري باستعمال الجبر**

جِد جبريًّا التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$

إذا عدت إلى تعريف كل من التباين والانحراف المعياري، تستنتج أن عليك القيام بالخطوات التالية:

1. حساب متوسّط مجموعة المعطيات.
2. حساب تربيع الفرق بين المتوسّط وكل معطى.

3. حساب مجموع التربيعات التي حصلت عليها، وقسمته المجموع على عددها، لتحصل على التباين.

4. حساب الجذر التربيعي الموجب للتباين.

ابدأ بحساب المتوسِّط. $\bar{x} = \frac{14+13+16+9+3+7+11+12+11+4}{10} = 10$

أنشئ الجدول التالي:

| المُعطى $x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|
| 14 | 4 | 16 |
| 13 | 3 | 9 |
| 16 | 6 | 36 |
| 9 | -1 | 1 |
| 3 | -7 | 49 |
| 7 | -3 | 9 |
| 11 | 1 | 1 |
| 12 | 2 | 4 |
| 11 | 1 | 1 |
| 4 | -6 | 36 |
| | المجموع | 162 |

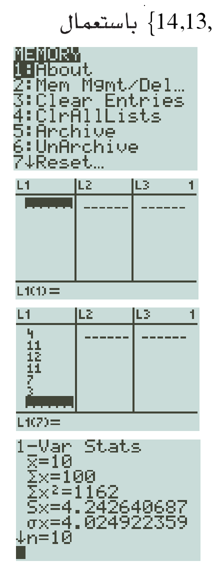
احسب التباين: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\left((x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+...+(x_n-\bar{x})^2\right) = \frac{162}{10} = 16.2$

احسب الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{16.2} \approx 4.025$

**حــــاولْ** جد جبريًّا التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{0,3,1,1,0,5,1,0,3,0\}$

**مثـــــــــال 2** **إيجاد الانحراف المعياري باستعمال الحاسبة البيانية**

جِد التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{14,13,16,9,3,7,11,12,11,4\}$ باستعمال الحاسبة البيانية:




ابدأ بإفراغ اللوائح Lists في الحاسبة البيانية:

اضغط على [2nd] ثم [+] تحصل على الشاشة المقابلة.

اضغط على [4] لتختار إفراغ اللوائح ثم على [ENTER].

أدخل المعطيات:

اضغط على [STAT] ثم [ENTER]، تحصل على الشاشة المقابلة. أدخل المعطيات في اللائحة $L_1$ عن طريق إدخالها معطى بعد آخر والضغط على [ENTER] كلما أدخلت معطى. بعد الانتهاء من إدخال المعطيات تحصل على الشاشة المقابلة.

اضغط على [STAT] واختر CALC ثم اضغط على [ENTER] لتختار حساب قياسات متغيّر إحصائي واحد.

اضغط على [2nd] ثم [1] لتختار اللائحة $L_1$ ثم [ENTER] لإطلاق عملية الحساب. ستحصل على الشاشة المقابلة حيث ترى قيم المتوسِّط $\bar{x}$ والانحراف المعياري $\sigma x$.

**حــاولْ** استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{0, 3, 1, 1, 0, 5, 1, 0, 3, 0\}$ .

لإيجاد التباين والانحراف المعياري لمجموعة معطيات مجمَّعة في فئات. قم بالخطوات التالية:

1. حدِّد لكل فئة مركزها $x_i$، واضرب قيمته في تكرار الفئة $f_i$. اجمع نواتج الضرب هذه، واقسم المجموع على مجموع التكرارات لتحصل على متوسط المعطيات $\bar{x}$ .
2. احسب تربيعات الفروق بين المتوسِّط $\bar{x}$ ومركز كل فئة $x_i$.
3. اجمع التربيعات التي حصلت عليها.
4. اضرب كل تربيع عائد إلى فئة بتكرار هذه الفئة، ثم اجمع نواتج الضرب، واقسم المجموع على مجموع التكرارات، تحصل على التباين.
5. جد الجذر التربيعي الموجب للتباين، تحصل على الانحراف المعياري.

**مثـــــال 3** **إيجاد التباين والانحراف المعياري لمجموعة معطيات مجمَّعة في فئات**

جِد التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات المجمَّعة في فئات كما يُبيّن ذلك الجدول التالي:

| الفئة | $[20, 22[$ | $[22, 24[$ | $[24, 26[$ | $[26, 28[$ | $[28, 30[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 10 | 20 | 10 | 5 |

أنشئ الجدول التالي ثم أكمله:

| الفئة | التكرار $f_i$ | المركز $x_i$ | $f_i \bullet x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i \bullet (x_i - \bar{x})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $[20, 22[$ | 5 | 21 | 105 | $-4$ | 16 | 80 |
| $[22, 24[$ | 10 | 23 | 230 | $-2$ | 4 | 40 |
| $[24, 26[$ | 20 | 25 | 500 | 0 | 0 | 0 |
| $[26, 28[$ | 10 | 27 | 270 | 2 | 4 | 40 |
| $[28, 30[$ | 5 | 29 | 145 | 4 | 16 | 80 |
| المجموع | 50 | المجموع | 1250 | | المجموع | 240 |

المتوسِّط $\bar{x} = \frac{1250}{50} = 25$

التباين: $\sigma^2 = \frac{240}{50} = 4.8$

الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4.8} \approx 2.2$

**حــاولْ** جد التباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات المجمَّعة في فئات، كما يُبيّن ذلك الجدول التالي:

| الفئة | $[18, 20[$ | $[20, 22[$ | $[22, 24[$ | $[24, 26[$ | $[26, 28[$ |
|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 8 | 12 | 20 | 12 | 8 |

## التمــــاريــــن

### التواصل في الرياضيات

1 لماذا يكون التباين والانحراف المعياري على الدوام عددَين موجبَين؟

2 أي علاقة تربط بين التباين والانحراف المعياري؟ هل يكون الانحراف المعياري على الدوام أصغر من التباين؟

## تمارين موجّهة

**جد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة معطيات باستعمال الجبر.**

3 $\{10,8,6,4,2\}$

4 $\{3,3,4,5,5\}$

5 استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{4.82, 5.22, 8.32, 3.22, 1.56\}$.

6 يُبيّن الجدول التالي توزيع العاملين في إحدى المؤسسات وفقًا لأعمارهم. احسب التباين والانحراف المعياري لهذه المعطيات.

| الفئة | [20,22[ | [22,24[ | [24,26[ | [26,28[ | [28,30[ | [30,32[ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 5 | 10 | 20 | 10 | 5 | 2 |

## تمارين وتطبيقات

**جد التباين والانحراف المعياري لكل مجموعة معطيات باستعمال الجبر.**

7 $\{4,4,4,4,5\}$

8 $\{8,12,30,35,48,50,62\}$

9 استعمل الحاسبة البيانية لإيجاد الانحراف المعياري لمجموعة المعطيات $\{0.33,1.24,2.71,7.42,6.21\}$

10 يُبيّن الجدول التالي نتائج استفتاء جرى على عيّنة من الموسيقيين حول عدد الساعات التي يُخصّصونها للتمرُّن أسبوعيًّا. احسب التباين والانحراف المعياري لهذه المعطيات.

| الفئة | [1,6[ | [6,11[ | [11,16[ | [16,21[ | [21,26[ | [26,31[ | [31,36[ | [36,41[ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | 13 | 9 | 9 | 14 | 16 | 8 | 8 | 3 |

11 **كرة السلة** لعب آلان 13 مباراة في كرة السلّة، وحقّق فيها النقاط التالية على التوالي: 24، 16، 9، 17، 17، 23، 20، 26، 17، 14، 58، 27، 28. جِد المتوسّط والتباين والانحراف المعياري لمجموعة المعطيات تلك.

12 مجموعة معطيات متوسّطها 4، ووسيطها 3، وانحرافها المعياري 1.6

أ) ضربت كل مُعطى في 5. ما متوسّط مجموعة المعطيات الجديدة؟ ما وسيطها؟ ما انحرافها المعياري؟

ب) أضفت 5 إلى كل مُعطى أصلي. ما متوسّط مجموعة المعطيات الجديدة؟ ما وسيطها؟ ما انحرافها المعياري؟

13 **قياس** طلب معلم الصف الرابع إلى تلاميذه أن يقيسوا بالسنتيمتر طول الطاولة التي يجلسون إليها. دوّن المعلّم هذه القياسات عل اللوح الأسود. وكانت كما يلي: 49، 50، 49، 48، 48، 19، 50، 49، 48، 50، 49، 50. جِد متوسّط هذه المعطيات ووسيطها وانحرافها المعياري.

**14** إذا تضمَّنت مجموعة معطيات عنصرًا كانت المسافة بينه وبين متوسِّط المجموعة أكبر من ثلاثة أضعاف الانحراف المعياري يُسمّي الإحصائيون هذا العنصر **قيمة متطرِّفة** . استعمل معطيات التمرين السابق، واذكر إن كان بينها قيم متطرِّفة. علِّل جوابك.

## نظرة إلى الوراء

**15** رمى نوزاد مكعَّب أعداد.

أ ما احتمال أن يُظهر المكعَّب العدد 3؟

ب ما احتمال أن يُظهر المكعَّب العدد8؟

ج ما احتمال أن يُظهر المكعَّب عددًا غير موجب؟

د ما احتمال أن يُظهر المكعَّب عددًا زوجيًّا؟

## نظرة إلى الأمام

**16** يُبيّن الجدول المقابل أعداد طلاّب الصفوف العاشر والحادي عشر والثاني عشر في إحدى الثانويات.

| الصف | ذكور | إناث | المجموع |
|---|---|---|---|
| العاشر | 53 | 51 | |
| الحادي عشر | 47 | 50 | |
| الثاني عشر | 35 | 44 | |
| المجموع | | | |

أ انسخ الجدول ثم أكمله.

ب ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا من طلاّب الصف الحادي عشر؟

ج ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا أنثى؟

د ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا ذكرًا من الصف الثاني عشر؟

هـ ما احتمال أن يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا أنثى من الصف العاشر؟

و ما احتمال يكون طالب تم اختياره عشوائيًّا ذكرًا أو من الصف العاشر؟

# قوانين الاحتمال Laws of probability

**لماذا؟**
يستعمل الخبراء في أمور الانتخابات الاحتمال ومعطيات التطور الديموغرافي ونتائج الدورات السابقة، لصياغة توقُّعات حول نتائج الدورة المقبلة.

**الأهداف**

- يذكر قوانين الاحتمال ويستعملها.

**المفردات Vocabulary**

الأحداث المتنافية Mutually exclusive events
الأحداث المستقلّة Independent events
متمِّم الحدث Complement of an event
المُخرَج Outcome

تعلَّمت في الصفوف السابقة المفاهيم الأوليَّة في الاحتمال، كما تعلَّمت كيف تحسب احتمال حدث كالحصول على العدد 5، عند رمي مكعَّب الأعداد. سوف تتعلم في هذا الدرس أن هناك علاقات يُمكن لها أن تربط بين عدة أحداث، وأن بالإمكان تركيب أحداث جديدة، انطلاقًا من أحداث أخرى باستعمال الرابط «و» أو الرابط «أو»، مثل الحدث:«الحصول على عدد زوجي، أو الحصول على عدد أصغر من 3» الذي يتركَّب من حدث:«الحصول على عدد زوجي» وحدث:«الحصول على عدد أصغر من 3» باستعمال الرابط «أو». يُلخِّص الجدول أدناه المفاهيم الأساسية التي سبق لك تعلُّمها.

| المفهوم | التوضيح | مثال |
|---|---|---|
| التجربة العشوائية Experience | فعل يؤدي إلى نتائج نستطيع ذكرها، ولا نستطيع أن نحدِّد أيًّا منها سيتحقق بالفعل. تُسمّى كل نتيجة ممكنة **مُخرَجًا**. | رمي مكعب أعداد. نعلم أن النتائج الممكنة هي 1، 2، 3، 4، 5، 6 ، ولا نعلم أيًّا منها سيظهر. |
| فضاء الاحتمالات Sample space | مجموعة كل النتائج الممكنة ، أي مجموعة كل المُخرَجات. | فضاء الاحتمالات عند رمي مكعَّب الأعداد، هو المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ |
| الحدث Event | جزء من فضاء الاحتمالات. يكون الحدث **بسيطًا**، إذا اقتصر على مُخرَج وحيد. | الحصول على عدد فردي عند رمي مكعَّب الأعداد هو الحدث $\{1, 3, 5\}$. الحدث $\{5\}$ حدث بسيط. |
| الاحتمال Probability | احتمال حدث ما، هو عدد $p$ يُحقق $0 \leq P \leq 1$، ويقيس حظ الحدث بالتحقُّق. احتمال الحدث **المستحيل** هو $P=0$، واحتمال الحدث **المؤكَّد** هو $P=1$ . مجموع احتمالات الأحداث البسيطة لتجربة عشوائية هو 1. | إذا كان $A$ هو حدث «الحصول على عدد أقل من 5 » عند رمي مكعَّب الأعداد، فإن احتماله هو $p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ |
| تساوي الاحتمالات Equally likelly | تكون التجربة العشوائية متساوية الاحتمالات، إذا تساوت احتمالات جميع الأحداث البسيطة ، أي تساوت حظوظ جميع المُخرَجات بالتحقُّق . في هذه الحالة، يساوي احتمال حدث ما نسبة عدد النتائج التي تحقق الحدث إلى عدد النتائج الممكنة كلها. | رمي مكعَّب الأعداد تجربة عشوائية متساوية الاحتمالات. إذا كان $A$ هو حدث «الحصول على عدد أقل من 5 » ، فإن عدد النتائج التي تحقِّق الحدث هو 4، في حين أن عدد النتائج الممكنة هو 6. ينتج من ذلك أن $p(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ |

إذا كان $A$ وَ $B$ حدثَيْن في تجربة عشوائية، تستطيع تعريف أحداث أخرى بتركيب هذين العددين. فالحدث $A\cup B$ (اقرأ $A$ أو $B$) هو الحدث الذي يتكوّن من جمع عناصر الحدث $A$ وعناصر الحدث $B$. فإذا كان $A=\{2, 4, 6\}$ حدث «الحصول على عدد زوجي» وَ $B=\{3\}$ حدث «الحصول على العدد 3»، فإن الحدث $A\cup B$ هو $A\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$. والحدث $A\cap B$ (اقرأ $A$ وَ $B$) هو الحدث الذي يتكوّن من جميع العناصر المشتركة بين الحدث $A$ والحدث $B$. فإذا كان $A=\{2, 4, 6\}$ حدث «الحصول على عدد زوجي» وَ $B=\{1, 2\}$ حدث «الحصول على عدد أقل من 3»، فإن الحدث $A\cap B$ هو $A\cap B=\{2\}$ .

## مثـــــال 1 إيجاد أحداث مركَّبة

تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب أعداد. جِد الحدث $A\cup B$ والحدث $A\cap B$، حيث $A$ هو حدث «الحصول على عدد فردي»، وَ $B$ هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 1».

الحدث $A$ هو الحدث $A=\{1, 3, 5\}$ والحدث $B$ هو الحدث $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$. الحدث $A\cup B$ هو $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، أي الحدث المؤكَّد؛ والحدث $A\cap B$ هو الحدث $A\cap B=\{3, 5\}$ .

**حـــاولْ** تقضي التجربة العشوائية بسحب كرة واحدة من كيس فيه 10 كرات مرقَّمة من 1 إلى 10. جِد الحدث $A\cup B$ والحدث $A\cap B$، حيث $A$ هو حدث «الحصول على عدد فردي»، وَ $B$ هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 9».

### احتمال $A\cup B$

إذا كان الحدثان $A$ وَ $B$ متنافيَيْن، فإن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

إذا كان الحدثان $A$ وَ $B$ غير متنافيين، فإن

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

## مثـــــال 2 إيجاد احتمالات أحداث مركَّبة

تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب أعداد.

أ  جِد احتمال الحدث $A\cup B$ واحتمال الحدث $A\cap B$، حيث $A$ هو حدث «الحصول على عدد فردي»، وَ $B$ هو حدث «الحصول على أكبر من 1».

الحدث $A$ هو الحدث $A=\{1, 3, 5\}$، والحدث $B$ هو الحدث $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$. ينتج من ذلك

$p(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ وَ $p(B)=\frac{5}{6}$

من ناحية أخرى، فإن الحدث $A\cap B$ هو الحدث $A\cap B=\{3, 5\}$ . ينتج من ذلك $p(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

وبالتالي: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{6}+\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$

للتحقُّق من النتيجة، نلاحظ أن الحدث $A\cup B$ هو $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$، أي الحدث المؤكَّد وبالتالي $P(A\cup B)=1$ .

ب جِد احتمال الحدث $A \cup B$ واحتمال الحدث $A \cap B$ ، حيث $A$ هو حدث «الحصول على عدد زوجي»، وَ $B$ هو حدث «الحصول على عدد أصغر من 2».

الحدث $A$ هو حدث $A = \{2,4, 6\}$ ، والحدث $B$ هو الحدث $B = \{1\}$ ينتج من ذلك:

$p(B) = \frac{1}{6}$ وَ $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

من ناحية أخرى، فإن الحدث $A \cap B$ هوالحدث $A \cap B = \{ \ \} = \varnothing$ ، أي أن الحدثين متنافيان.

ينتج من ذلك: $p(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

للتحقُّق من النتيجة، نلاحظ أن الحدث $A \cup B$ ، هو $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$ وبالتالي

$p(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

**حاولْ** تقضي التجربة العشوائية بسحب كرة واحدة من كيس فيه 7 كرات مرقَّمة من 1 إلى 7.

أ جِد احتمال الحدث $A \cup B$ ، واحتمال الحدث $A \cap B$ ، حيث $A$ هو حدث «الحصول على عدد زوجي»، وَ $B$ هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 3».

ب جِد احتمال الحدث $A \cup B$ ، واحتمال الحدث $A \cap B$ ، حيث $A$ هو حدث «الحصول على عدد زوجي»، وَ $B$ هو حدث «الحصول على عدد أكبر من 6».

إذا كان $A$ وَ $B$ حدثَيْن متنافيين، فإنهما لا يتحقَّقان معًا، لأن تحقُّق أحدهما يمنع تحقُّق الثاني في الوقت نفسه. هل يحتِّم عدم تحقُّق أحدهما أن يتحقَّق الآخر؟ قد يكون الأمر كذلك وقد لا يكون. فإذا كان الحدث $A$ «الحصول على عدد زوجي» عند رمي مكعَّب أعداد، وكان الحدث $B$ «الحصول على العدد 3»، فإن عدم تحقُّق أحدهما لا يحتِّم تحقُّق الآخر، لأن الحصول على 5 لا يحقِّق أيًّا منهما. على العكس من ذلك، إذا كان الحدث $A$ «الحصول على الكتابة» عند رمي قطعة نقود معدنية، وكان الحدث $B$ «الحصول على الصورة»، فإن عدم تحقُّق أحدهما يحتِّم تحقُّق الآخر، أي أن الحدثين يُحقِّقان: $A \cap B$ هو الحدث المستحيل وَ $A \cup B$ هو الحدث المؤكَّد. في هذه الحالة تقول عن الحدث $B$ أنه متمِّم الحدث $A$. استعمل الرمز $\overline{A}$ للدلالة على متمِّم الحدث $A$. لاحظ التالي:

إذا كان $B$ متمِّم $A$ فإن $A$ هو متمِّم $B$.

## مثـــــال 3 إيجاد الحدث المتمِّم

**جِد الحدث المتمِّم في كل حالة.**

أ تقضي التجربة العشوائية برمي قطعة معدنية مرَّتَيْن متتاليتَيْن. الحدث $A$ هو «الحصول على الصورة مرَّة على الأكثر».

ب تقضي التجربة العشوائية باختيار مندوب عن الصف الحادي عشر بطريقة القرعة. الحدث $A$ هو «اختيار أنثى».

أ فضاء الاحتمالات هو $\{(T, T), (T, I), (I, T), (I, I)\}$ ، حيث يُمثِّل $I$ الحصول على الصورة، وَ $T$ الحصول على الكتابة. الحدث $A$ هو $\{(T, T), (T, I), (I, T)\}$ .

ينتج من ذلك $\overline{A} = \{(I, I)\}$ ، أي الحصول على الصورة مرَّتين.

ب الحدث المتمم هو حدث «اختيار ذكر».

**حـــاولْ** جِد الحدث المتمِّم في كل حالة.

**أ** تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب الأعداد، الحدث $A$ هو «الحصول على عدد فردي».

**ب** تقضي التجربة العشوائية برمي قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية. الحدث $A$ هو «الحصول على الصورة مرة على الأقل».

### احتمال الحدث المتمِّم

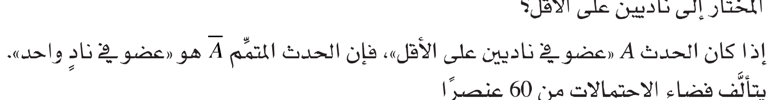
يتم حساب احتمال الحدث المتمِّم للحدث $A$ باستعمال القاعدة.

$P(\overline{A})=1-P(A)$

**مثـــــال** 4 **إيجاد الحدث المتمِّم**

في إعدادية آزادي ثلاثة أندية: نادي المسرح ويضمّ 32 عضوًا، ونادي الرياضيات ويضمّ 33 عضوًا، ونادي كرة الطاولة ويضمّ 39 عضوًا.
بعض الطلاّب أعضاء في أكثر من نادٍ، كما يُبيّن ذلك المخطَّط المقابل.
اختار المدير أحد أعضاء هذه النوادي بطريقة عشوائية، لتمثيل المدرسة في اجتماع يُعقد في مديرية التعليم. ما احتمال أن ينتمي العضو المختار إلى ناديَيْن على الأقل؟

رياضيات 8 7 مسرح 6 10 8 11 كرة طاولة 10



إذا كان الحدث $A$ «عضو في ناديين على الأقل»، فإن الحدث المتمِّم $\overline{A}$ هو «عضو في نادٍ واحد».
يتألَّف فضاء الاحتمالات من 60 عنصرًا
(عدد المنتسبين إلى النوادي الثلاثة $60=6+7+8+8+11+10+10$). عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث المتمِّم هو $24=6+8+10$ ينتج من ذلك $P(\overline{A})=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}$ وَ

$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}=0.60=60\%$

**حـــاولْ** ما احتمال أن يكون المندوب الذي تم اختياره عضوًا في ناديين فقط؟

إذا كان $A$ وَ $B$ حدثَيْن في تجربة عشوائية واحدة، قد يكون لتحقُّق أحدهما تأثير على تحقُّق الآخر، وقد لا يكون له تأثير. فإذا كان لديك كيس فيه 5 كرات حمراء وَ 3 كرات زرقاء وكانت التجربة أن تسحب كرتين على التوالي، فإن احتمال أن تكون الكرة الثانية حمراء يختلف بين أن تعيد الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الثانية، وألاّ تعيدها إليه.
ليكن الحدث $A$ «الكرة الأولى خضراء» والحدث $B$ «الكرة الثانية حمراء». إذا أعدت الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الكرة الثانية، فإن الحدث $A$ لا يؤثِّر في احتمال الحدث $B$ الذي يساوي $\frac{5}{8}$.
أما إذا لم تعد الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الكرة الثانية، فإن احتمال $B$ هو $\frac{5}{7}$.
تقول عن حدثين $A$ وَ $B$ أنهما **مستقلّان** إذا لم يكن لتحقُّق أحدهما أو عدم تحقُّقه تأثير على احتمال تحقُّق الآخر.

### احتمالات الأحداث المستقلّة

إذا كان $A$ وَ $B$ حدثَيْن مستقلَّيْن فإن

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

**مثـــــال 5** **إيجاد احتمالات الأحداث المستقلّة**

تقضي التجربة العشوائية بسحب كرتَيْن على التوالي من كيس فيه 9 كرات حمراء وَ 3 كرات خضراء. جِد احتمال أن تكون الكرتان حمراوين، مفترضًا إعادة الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الثانية.

تمت إعادة الكرة الأولى إلى الكيس قبل سحب الثانية: الحدثان، في هذه الحالة، مستقلان

وَ $P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$

لأن $P(A)=P(B)=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

**حـــاولْ** مع آكار كيس فيه 6 كرات حمراء وَ 4 كرات زرقاء، ومع أخيها كيس فيه كرتان صفراوان وكرة حمراء و 5 كرات سوداء. سحب كل منهما كرة من كيسه. ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمراوين؟

**مثـــــال 6** **إيجاد احتمالات الأحداث المستقلّة**

تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب الأعداد 3 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على عدد زوجي في كل مرة؟

الأحداث $A$ «الحصول على عدد زوجي في المرة الأولى» وَ $B$ «الحصول على عدد زوجي في المرة الثانية» وَ $C$ «الحصول على عدد زوجي في المرة الثالثة» أحداث مستقلَّة، واحتمال كل منها يساوي $\frac{1}{2}$.

ينتج من ذلك: $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

**حـــاولْ** تقضي التجربة العشوائية برمي قطعة نقود معدنية 4 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على الصورة في كل مرة؟

## التمـــــاريـــــن

### التواصل في الرياضيات

1. أي من قاعدتَي حساب احتمال الحدث $A\cup B$ تصحّ في جميع الأحوال؟ وضِّح جوابك.
2. كيف تتحقَّق من أن حدثَيْن $A$ وَ $B$ مستقلاّن إذا عرفت احتمال كل منهما واحتمال $A\cap B$؟

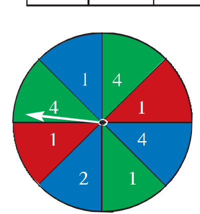
### تمارين موجّهة

3. تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّب أعداد. جِد $A\cap B$ وَ $A\cup B$ ، حيث الحدث $A$ «الحصول على عدد أقل من 5» وَ الحدث $B$ «الحصول على عدد لا يقل عن 3».

**4** في استطلاع للرأي حول تحديث الأساليب التربوية، تم استفتاء آراء 100 من العاملين في الحقل التربوي. يُبيّن الجدول المقابل نتائج هذا الاستفتاء. انسخ الجدول ثم أكمله. لو تم اختيار أحد المستطلعين بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون من الذين كانوا ضد التحديث أو كانوا بلا رأي؟

| | ذكور | إناث | المجموع |
|---|---|---|---|
| مع | 18 | 9 | |
| ضد | 12 | 25 | |
| بلا رأي | 20 | 16 | |
| المجموع | | | |

**5** في التجربة العشوائية للتمرين السابق، جِد الحدث المتمِّم للحدث «تم اختيار المُستطلع من الذين أبدوا رأيًا».



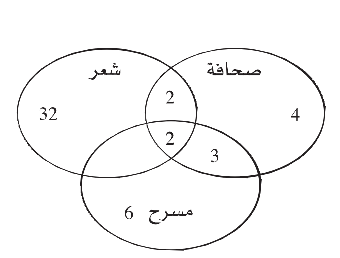

**6** استعمل الحدث المتمِّم لإيجاد احتمال أن يكون المستطلع قد أبدى رأيًا.

**7** تقضي التجربة العشوائية بإدارة القرص المُؤشِّر مرَّتين متتاليتين. ما احتمال الحصول على العدد 4 في المرَّتين.

**8** تقضي التجربة العشوائية بإدارة القرص المُؤشِّر 3 مرات متتالية. ما احتمال الحصول على اللون الأحمر ثم الأخضر ثم الأحمر من جديد؟

## تمارين وتطبيقات

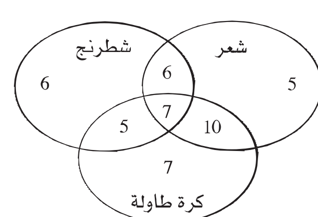
**9** في إعدادية أحمدي خاتي ثلاثة أندية للنشاطات غير الصفّية. نادٍ للشعر ويضم 36 عضوًا، ونادٍ للمسرح ويضم 11 عضوًا، ونادٍ للصحافة ويضم 11 عضوًا أيضًا. ينتمي بعض التلاميذ إلى أكثر من نادٍ واحد كما يُبيّن ذلك المخطَّط المقابل. تم اختيار أحد أعضاء النوادي الثلاثة بصورة عشوائية. ما احتمال أن ينتمي هذا العضو إلى ناديَيْن على الأقل؟




**10** هفال طالب في الشعبة الأولى من الصف الحادي عشر التي تعدّ 18 تلميذًا، وأخته في الشعبة الثانية التي تعدّ 20 طالبة. جرى اختيار مندوب عن كل شعبة بطريقة القرعة. ما احتمال أن يكون هفال وأخته مندوبَي الشعبتين؟

**11** ما احتمال أن تحصل على الكتابة ثم الصورة ثم الصورة عند رمي قطعة نقود معدنية 3 مرات متتالية؟

**12** في إعدادية حلبجة ثلاثة أندية: نادي الشطرنج ويضم 24 عضوًا ونادي كرة الطاولة ويضم 29 عضوًا، ونادي الشعر ويضم 28 عضوًا. ينتمي بعض التلاميذ إلى أكثر من نادٍ واحد كما يُبيّن ذلك المخطَّط المقابل. ما احتمال أن يكون عضو تم اختياره عشوائيًا منتسبًا إلى ناديين على الأكثر؟



**13** الأحداث $A$ وَ $B$ وَ $C$ مستقلّة واحتمالاتها هي: $P(A)=0.5$ ، $P(B)=0.25$ ، $P(C)=0.75$ . جِد الاحتمالات التالية: **أ** $P(A\cap B)$ ، **ب** $P(A\cap C)$ ، **ج** $P(A\cup B)$ .

**في التمارين من 16 إلى 18، حدِّد إن كان الحدثان $A$ وَ $B$ مستقلَّيْن أم لا، واحسب احتمال $A\cap B$ .**

**14** التجربة العشوائية: رمي مكعّب أعداد. الحدث $A$: «الحصول على عدد زوجي». الحدث $B$: «الحصول على 2 أو 4».

**15** التجربة العشوائية: رمي مكعّب أعداد. الحدث $A$: «الحصول على العدد 6». الحدث $B$: «الحصول على عدد أقل من 5».

**16** التجربة العشوائية: رمي مكعّب أعداد. الحدث $A$: «الحصول على العدد 4». الحدث $B$: «الحصول على عدد أكبر من 3».

**17** **طيران** تُظهر إحصاءات إحدى شركات الطيران أن رحلتها من تاران إلى هولير تصل في موعدها في 92% من المرات، وأن رحلتها من هولير إلى عمّان تُقلع في موعدها في 97% من المرّات. ينوي كرمانج السفر من تاران إلى عمّان مرورًا بهولير. ما احتمال أن تصل الطائرة التي تنقله إلى هولير في موعدها، وأن تُقلع إلى عمّان في موعدها؟

**18** احتمال أن يحضر كامران الاحتفال هو 80%، واحتمال أن يحضره كاروان 95%. ما احتمال حضورهما الاحتفال معًا، علمًا بأن حضور أحدهما لا يؤثِّر في حضور الآخر؟

**19** يحتوي كيس على 15 كرة مرقَّمة من 1 إلى 15. سحبت رانية كرة من الكيس ثم إعادتها إليه قبل أن تسحب كرة للمرة الثانية.

**أ** ما احتمال أن تحمل الكرتان العدد 8؟

**ب** ما احتمال أن تسحب رانية الكرة التي تحمل العدد 8 مرة واحدة فقط؟

**20** تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّبي أعداد أحدهما أحمر والثاني أزرق. الحدث $A$ هو التالي «يُظهر المكعب الأحمر العدد 1» وَ الحدث $B$ هو التالي: «مجموع العددين الظاهرين أقلّ من 4».

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 2 | 1 3 | 1 4 | 1 5 | 1 6 |
| 2 1 | 2 2 | 2 3 | 2 4 | 2 5 | 2 6 |
| 3 1 | 3 2 | 3 3 | 3 4 | 3 5 | 3 6 |
| 4 1 | 4 2 | 4 3 | 4 4 | 4 5 | 4 6 |
| 5 1 | 5 2 | 5 3 | 5 4 | 5 5 | 5 6 |
| 6 1 | 6 2 | 6 3 | 6 4 | 6 5 | 6 6 |

**أ** جِد $P(A)$ وَ $P(B)$ .

**ب** اكتب المُخرَجات التي تُحقّق الحدث $A\cap B$ . واستنتج احتمال هذا الحدث.

**ج** استعمل جوابي السؤالَيْن السابقَيْن لتقرِّر إن كان الحدثان مستقلَّيْن أم لا.

**21** جاء 5 تلاميذ إلى مسرح المدرسة، واختار كل منهم صفًّا من مقاعد المسرح العشرة ليجلس فيه. ما احتمال أن يختار تلميذان على الأقل الصف نفسه؟

**22** **تفكير ناقد** إذا كان الحدثان $A$ وَ $B$ مستقلَّين، هل يكون الحدثان المتمِّمان $\overline{A}$ وَ $\overline{B}$ مستقلين؟ علِّل جوابك.

23 **اكتب** اذكر طريقتين لإيجاد احتمال الحصول على الكتابة مرَّة على الأقل عند رمي قطعة نقود معدنية مرَّتين متتاليتَيْن.

24 تم صنع قطعة نقود معدنية بحيث يكون احتمال ظهور الصورة عند رمي القطعة ضعف احتمال ظهور الكتابة. جِد احتمال ظهور كل من الصورة والكتابة.

## نظرة إلى الوراء

25 دوَّنت شيرين على مدى 10 أسابيع متوسِّط عدد الكيلومترات التي قطعتها سيارتها بالغالون الواحد، وحصلت على18 ،17 ،19 ،18 ،18 ،25 ،29 ،30 ،26 ،19 .

أ جِد متوسِّط هذه المعطيات ووسيطها ومنوالها.

ب جِد القيمة الكبرى والقيمة الصغرى والمدى.

ج جِد التباين والانحراف المعياري.

د ما المعطيات التي تبعد عن المتوسط أكثر من انحراف معياري واحد؟

## نظرة إلى الأمام

26 تضم عيِّنة من السائقين 3510 أشخاص بينهم 1950 رجلاً وَ 103 مصابون بعمى الألوان. 6 أشخاص فقط من المصابين بعمى الألوان هم من النساء. ما احتمال أن يكون شخص تم اختياره عشوائيًّا من الرجال أو من المصابين بعمى الألوان؟

# الدرس 4

# تقنيات العد Counting techniques

**لماذا؟**

تستعمل شيرين تقنيات العد لإيجاد عدد الطرق التي يُمكن أن تعرض بها اللوحات التي رسمتها.

**الأهداف**

- يستعمل تقنيات العد لحساب الاحتمالات.

**المفردات Vocabulary**

التباديل Permutations

التراتيب Arrangements

التوافيق Combinations

القانون الأساسي للعد Fundamental counting principle

مخطَّط الشجرة Tree diagram

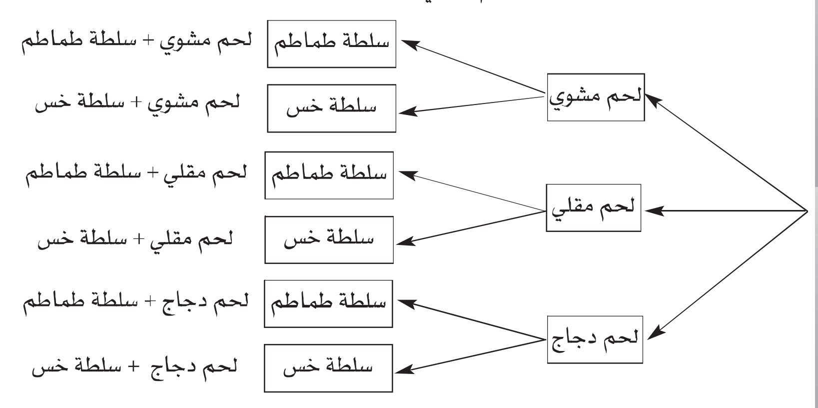
تعلَّمت أن حساب احتمال تحقُّق حدث في تجربة عشوائية متساوية الاحتمالات يعود إلى قسمة عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث على عدد المُخرجات كلها. من هنا نشأت الحاجة إلى تقنيات عد تساعد على إيجاد مثل هذه الأعداد.

يُلخِّص الجدول أدناه بعض تقنيات العد التي تعلَّمتها من قبل.

| التقنية | الشرح | مثال |
|---|---|---|
| **القانون الأساسي للعد Fundamental counting principle** | ينص هذا القانون على التالي: إذا كان هناك $m$ طريقة لخيار أول وَ $n$ طريقة لخيار ثان، فإن هناك $m \times n$ طريقة للخيارين معًا. | تتألف وجبة الغداء من صحن مقبّلات وصحن رئيسي. إذا كان عدد صحون المقبّلات 5 وعدد الصحون الرئيسية 3، فيمكنك اختيار غدائك بـ $3 \times 5 = 15$ طريقة. |
| **مضروب $n$ n factorial** | إذا كان $n$ عددًا صحيحًا غير سالب، فإن مضروب $n$ هو $n! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 1\times2\times..\times n & n>0 \end{cases}$ | $3! = 1\times2\times3 = 6$ <br> $0! = 1$ |
| **التباديل Permutations** | تبديل $n$ شيئًا هو وضعها في ترتيب معيّن. عدد تباديل $n$ شيئًا هو مضروب $n$، أي $n!$. | تباديل الأحرف $A, B, C$ هي $ABC, BCA, CAB$ <br> $ACB, CBA, BAC$ <br> وعددها $3! = 6$ |
| **التراتيب Arrangements** | ترتيب $r$ شيئًا من أصل $n$ هو اختيار $r$ شيئًا من الأشياء $n$ بترتيب معيّن. عدد تراتيب $r$ شيئًا من أصل $n$ هو $_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ | $AB$ و $BA$ ترتيبان مختلفان لحرفَيْن من أصل الأحرف الثلاثة $A, B, C$. عدد تراتيب حرفَيْن من أصل 3 هو $_3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$ |
| **التوافيق Combinations** | توفيق $r$ شيئًا من أصل $n$ هو اختيار $r$ شيئًا من الأشياء $n$ من دون التوقُّف عند الترتيب. عدد توافيق $r$ شيئًا من أصل $n$ هو $_nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ | $\{A,B\}$ هو توفيق حرفين من أصل الأحرف الثلاثة $A, B, C$. عدد توافيق حرفين من أصل 3 هو $_3C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ |

## مثـــال 7 استعمال مخطَّط الشجرة للعد

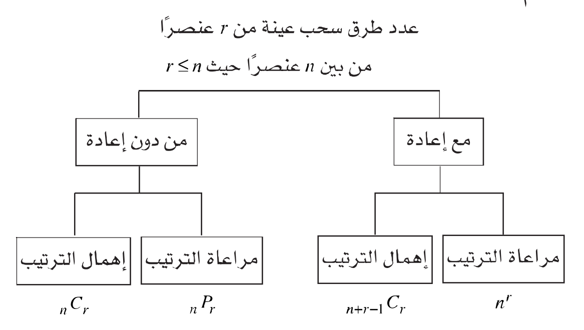
دخل أحد الأشخاص إلى مطعم لتناول وجبة الغداء. وجد أن عليه أن يختار نوعًا بين 3 أنواع من اللحوم: لحم مشوي ولحم مقلي ولحم دجاج، ونوعًا بين نوعين من السلطة: سلطة خس وسلطة طماطم. أنشئ مخطَّط شجرة يُبيّن جميع الطرق الممكنة لاختيار طبق لحم وطبق سلطة. احسب احتمال أن يختار الشخص طبق لحم مشوي وطبق سلطة.




يستطيع هذا الشخص اختيار طبق لحم وطبق سلطة بـ 6 طرق ممكنة. وهو يستطيع أن يختار غداء مكوَّنًا من طبق لحم مشوي وطبق سلطة بطريقتَيْن. ينتج من ذلك أن احتمال اختياره طبق لحم مشوي وطبق سلطة هو $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

**حـــاولْ** ما احتمال أن يختار طبق لحم وسلطة طماطم؟

يُستعمل مخطَّط الشجرة عندما يكون عدد المُخرَجات قليلاً. غير الأمر ليس يسيرًا في غالب الأحيان. فإذا حاولت أن تُنشئ مخطط شجرة لإيجاد كم عددًا من 5 أرقام مختلفة يُمكنك أن تُركّب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 فإن عدد أوراق الشجرة سيكون كبيرًا. من هنا نشأت الحاجة إلى تقنيات أخرى للعد. من هذه التقنيات مبدأ العد الأساسي. يقوم هذا المبدأ على أن اختيار $r$ عنصرًا من $n$ ، عنصرًا بعد آخر، يجعل عدد الخيارات الممكنة مساويًا لناتج ضرب عدد الخيارات الممكنة عند اختيار كل عنصر. تختلف النتيجة إذا كان العنصر المختار يُعاد إلى المجموعة قبل اختيار العنصر اللاحق أم لا، وإذا كان الترتيب الذي يتم به الاختيار مهمًّا أم لا. وهذا يضعنا أمام 4 حالات:



**مثال 2** **استعمال القانون الأساسي للعد لإيجاد عدد عناصر عيّنة**

كم عددًا من 5 أرقام مختلفة يُمكنك أن تُركِّب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6؟

لتركيب مثل هذا العدد، ابدأ باختيار رقم الآحاد. يُمكنك اختياره من بين 6 أرقام. عدد الخيارات هو 6. اختر بعد ذلك رقم العشرات. يُمكنك اختياره من بين الأرقام الخمسة المتبقية. عدد الخيارات هو 5. وهكذا فإن عدد خيارات رقم المئات هو 4، وعدد خيارات رقم الآلاف هو 3، وعدد خيارات رقم عشرات الآلاف هو 2. استعمل القانون الأساسي للعد كي تجد كم عددًا يُمكنك أن تُكوِّن. يُمكنك أن تُكوّن.

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$$

720 عددًا

**حاولْ** كم عددًا من 4 أعداد مختلفة تستطيع أن تركِّب باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7؟

**مثال 3** **إيجاد عدد الطرق لسحب عيّنة**

يحتوي صندوق على 7 كرات مرقَّمة من 1 إلى 7. جِد عدد الطرق لسحب 3 كرات في الحالات التالية:

أ مع إعادة، ومع مراعاة الترتيب. ب مع إعادة، ومع إهمال الترتيب.

ج من دون إعادة، ومع مراعاة الترتيب. د من دون إعادة، ومع إهمال الترتيب.

| | | |
|---|---|---|
| أ) | مع إعادة ومع مراعاة الترتيب | $n^r = 7^3 = 343$ |
| ب) | مع إعادة ومع إهمال الترتيب | ${}_{n+r-1}C_r = {}_{7+3-1}C_3 = {}_9C_3 = 84$ |
| ج) | من دون إعادة ومع مراعاة الترتيب | ${}_7P_3 = 210$ |
| د) | من دون إعادة ومع إهمال الترتيب | ${}_7C_3 = 35$ |

**حاولْ** يحتوي صندوق على 10 كرات مرقَّمة من 1 إلى 10. جِد عدد الطرق لسحب 4 كرات في الحالات التالية:

أ مع إعادة ومع مراعاة الترتيب ب مع إعادة ومع إهمال الترتيب

ج من دون إعادة ومع مراعاة الترتيب د من دون إعادة ومع إهمال الترتيب

**مثال 4** **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

يحتوي صندوق على 20 كرة مرقَّمة من 1 إلى 20. جرى سحب كرتين على التوالي ولم تتم إعادة الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية. ما احتمال أن تحمل كل كرة عددًا فرديًّا؟

كل مُخرَج من مُخرَجات هذه التجربة العشوائية هو زوج مرتَّب $(n_1, n_2)$ حيث يرمز $n_1$ إلى العدد الذي تحمله الكرة الأولى ويرمز $n_2$ إلى العدد الذي تحمله الكرة الثانية. عدد هذه المُخرَجات بالاستناد إلى القانون الأساسي للعد هو ناتج ضرب عدد الكرات في الصندوق عند سحب الكرة الأولى(20) في عدد الكرات عند سحب الكرة الثانية (19) أي $20 \times 19 = 380$ . عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث هو ناتج ضرب عدد الكرات التي تحمل عددًا فرديًّا عند سحب الكرة الأولى (10) في عدد الكرات التي تحمل عددًا فرديًّا عند سحب الكرة الثانية (9) أي 90. ينتج من ذلك أن احتمال أن تحمل كل كرة عددًا فرديًّا هو $\frac{9}{38} = \frac{90}{380}$.

**نقطة مراقبة √** **4.** ما احتمال أن تحمل كل كرة عددًا زوجيًّا؟

**مثال** 5 **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

يحتوي صندوق على 6 كرات حمراء وَ 4 كرات بيضاء. جرى سحب كرتين في آن. ما احتمال أن تكون كل كرة حمراء اللون.

عدد مُخرَجات هذه التجربة هو عدد توافيق كرتَيْن من أصل 10 كرات (6+4) . إنه:

$${}_{10}C_2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$$

عدد المُخرَجات التي تحقّق الحدث هو عدد توافيق كرتَيْن من أصل 6 (عدد الكرات الحمراء). إنه:

$${}_{6}C_2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

ينتج مما سبق أن احتمال أن تكون كل كرة حمراء $\frac{1}{3} = \frac{15}{45}$.

**حــاولْ** ما احتمال أن تكون كل كرة بيضاء؟

**مثال** 6 **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

تُخصّص إدارة الجامعة رقم ملف مكوَّن من 4 أرقام لكل طالب في السنة الأولى. ما احتمال أن يكون رقم باسل مكوَّنًا من 4 أرقام متتالية بدءًا من اليسار.

لتحديد عدد مُخرَجات هذه التجربة علينا أن نحدِّد إن كان كل مُخرَج ترتيبًا لـ 4 أرقام من أصل 10 أو توفيقًا لـ 4 أرقام من أصل 10. بما أن الترتيب الذي تندرج به أرقام الملفّات من اليسار إلى اليمين مهم، فإن المُخرج ترتيب وليس توفيقًا. عدد هذه المخرَجات هو

$${}_{10}P_4 = \frac{10!}{4!} = 5040$$

المُخرَجات التي تحقّق الحدث هي 0123، 1234، 2345، 3456، 4567، 5678، 6789. عددها 7.

ينتج مما سبق أن احتمال أن يكون رقم باسل مكوّنًا من 4 أرقام متتالية بدءًا من اليسار هو

$$\frac{7}{5040} = \frac{1}{720}$$

**حــاولْ** ما احتمال أن يكون رقم ملف باسل مكوّنًا من 4 أرقام متتالية، سواء قرأتها من اليمين إلى اليسار أو بالعكس؟

**مثال** 7 **حساب احتمال باستعمال تقنيات العد**

يحتوي صندوق على 7 كرات حمراء وَ 3 كرات سوداء. جرى سحب 3 كرات في آن. ما احتمال أن تكون إحدى الكرات على الأقل حمراء؟

عدد مُخرَجات هذه التجربة هو عدد توافيق 3 كرات من أصل 10 كرات(7+3) لأن الكرات سُحبت معًا ولا مجال، بالتالي، للحديث عن ترتيب. إنه

$${}_{10}C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120$$

المُخرَجات التي تحقّق الحدث هي تلك التي تتألّف من كرة حمراء وكرتَيْن سوداوين، وتلك التي تتألف من كرتين حمراوين وكرة سوداء، وتلك التي تتألف من 3 كرات حمراء.

عدد المُخرَجات التي تتألّف من كرة حمراء وكرتين سوداوين هو $_7C_1 \times {}_3C_2 = 7\times 3 = 21$.

عدد المُخرَجات التي تتألّف من كرتين حمراوين وكرة سوداء هو $_7C_2 \times {}_3C_1 = 21\times 3 = 63$.

عدد المُخرَجات التي تتألّف من 3 كرات حمراء هو $_7C_3 = 35$.

عدد المُخرَجات التي تحقّق الحدث هو $21+63+35 = 119$

ينتج من ذلك أن احتمال أن تكون إحدى الكرات الثلاث على الأقل حمراء هو $\frac{119}{120}$ .
كان من الممكن حل هذه المسألة باستعمال الحدث المتمِّم. فالحدث المتمِّم للحدث $A$ «إحدى الكرات الثلاث حمراء» هو الحدث $\overline{A}$ «الكرات الثلاث السوداء». عدد المُخرَجات التي تحقِّق الحدث المتمِّم هو عدد توافيق 3 كرات من أصل 3. إنه 1. ينتج من ذلك $P(\overline{A})=\frac{1}{120}$

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{120}=\frac{119}{120}$$

**حـــاول** ما احتمال أن تكون إحدى الكرات على الأكثر حمراء؟

# التمـــــــاريـــــــن

## التواصل في الرياضيات

1. وضِّح العلاقة بين مخطَّط الشجرة والقانون الأساسي للعد.
2. وضِّح العلاقة بين القانون الأساسي للعد وحساب عدد التراتيب.

## تمارين موجَّهة

3. تقضي التجربة العشوائية برمي 3 قطع نقود معدنية متشابهة. استعمل مخطَّط الشجرة لإيجاد جميع مُخرَجات هذه التجربة. واستعمل المخطَّط لحساب احتمال أن تظهر الصورة على وجهَي قطعتَيْن على الأقل.
4. قصد أحد الأشخاص معرضًا للسيارات لشراء سيارة. وجد في المعرض سيارات من نوع فورد ومرسيدس وتيوتا. ويوجد من كل نوع سيارات بيضاء وسوداء وفضية. استعمل مخطَّط الشجرة لإيجاد احتمال أن يشتري سيارة مرسيدس.
5. كم عددًا من 3 أرقام يُمكنك أن تُكوِّن باستعمال جميع الأرقام ما عدا 0؟
6. يحتوي صندوق على 11 كرة مرقَّمة من 1 إلى 11. جِد عدد الطرق لسحب 3 كرات في الحالات التالية:

   أ مع إعادة ومع مراعاة الترتيب
   ب مع إعادة ومع إهمال الترتيب
   ج من دون إعادة ومع مراعاة الترتيب
   د من دون إعادة ومع إهمال الترتيب
7. يحتوي صندوق على 13 كرة مرقَّمة من 1 إلى 13. تقضي التجربة العشوائية بسحب كرتين على التوالي. احسب احتمال أن تحمل الكرتان عددًا أقل من 10 في حال إعادة الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الكرة الثانية، وفي حال عدم إعادتها.
8. يحتوي كيس على 7 كرات سوداء وَ 3 كرات حمراء. تقضي التجربة العشوائية بسحب كرتين معًا. ما احتمال أن تكون الكرتان سوداوين؟

**9** تتألّف كلمة السر للدخول إلى البريد الإلكتروني من 5 أحرف إنجليزية. وضع شيراز في كيس أوراقًا متشابهة تحمل كل منها حرفًا من حروف الأبجدية الإنجليزية وعددها 26، ثم سحب 5 أوراق. ما احتمال أن تكون هذه الأحرف أحرفًا متتالية وفق الترتيب الأبجدي؟

**10** يحتوي صندوق على 9 كرات حمراء وَ 4 كرات سوداء، كلُّها متماثلة إلا باللون. تقضي التجربة العشوائية بسحب 3 كرات معًا. ما احتمال أن تكون كرتان على الأكثر من الكرات الثلاث سوداوين؟

## تمارين وتطبيقات

**11** عدد طلاّب الصف الحادي عشر 40 طالبًا. نجح 25 منهم في امتحان الرياضيات، وَ 28 في امتحان اللغة الأجنبية، وَ 15 طالبًا في الامتحانَيْن معًا. تقضي التجربة العشوائية باختيار أحد طلاّب الصف بالقرعة. ما احتمال أن يكون هذا الطالب ممَّن:

أ نجحوا في امتحان الرياضيات فقط.

ب نجحوا في امتحان اللغة الأجنبية فقط.

ج نجحوا في الامتحانَيْن.

د لم ينجحوا في أيّ من الامتحانَيْن.

**12** أنشئْ مخطَّط شجرة لإيجاد جميع الأعداد المكوَّنة من رقمَيْن مختلفَيْن، والتي يُمكنك تركيبها باستعمال الأرقام 1، 2، 3، 4، 5.

**13** إذا وضعت في صندوق 5 كرات مرقَّمة من 1 إلى 5 وسحبت كرتَيْن على التوالي مع إعادة الكرة الأولى إلى الصندوق قبل سحب الثانية، فما احتمال أن تسحب كرتَيْن تحملان الرقم نفسه؟

**14** يحتوي صندوق على 18 مصباحًا كهربائيًّا بينها 5 مصابيح غير صالحة. تقضي التجربة بسحب مصباحَيْن من الصندوق: الواحد بعد الآخر من دون إرجاع المصباح الأول إلى الصندوق قبل سحب المصباح الثاني. ما احتمال:

أ أن يكون المصباحان غير صالحين؟

ب أن يكون أحدهما على الأقل صالحًا؟

**15** ما احتمال أن تحصل على الكتابة مرَّتين والصورة مرَّتين عند رمي قطعة نقود معدنية 4 مرات متتالية؟

**16** تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّبَي أعداد أحدهما أحمر والثاني أزرق، ثم تدوين مجموع العددين الظاهرين.

احسب كل احتمال.

أ أن يكون المجموع عددًا فرديًّا أو أكبر من 11.

ب أن يكون المجموع عددًا زوجيًّا أصغر من 8.

ج أن يكون المجموع عددًا فرديًّا من رقم واحد.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 1 | 1 2 | 1 3 | 1 4 | 1 5 | 1 6 |
| 2 1 | 2 2 | 2 3 | 2 4 | 2 5 | 2 6 |
| 3 1 | 3 2 | 3 3 | 3 4 | 3 5 | 3 6 |
| 4 1 | 4 2 | 4 3 | 4 4 | 4 5 | 4 6 |
| 5 1 | 5 2 | 5 3 | 5 4 | 5 5 | 5 6 |
| 6 1 | 6 2 | 6 3 | 6 4 | 6 5 | 6 6 |

**17** في لعبة «معركة بحرية» يملك كل لاعب في البدء مدمِّرة وبارجة وغوّاصة وسفينة تموين وحاملة طائرات موضوعة على لوحة مربَّعة تتألف من 100خانة. يُبيِّن الجدول أدناه عدد الخانات التي تحتلها كل قطعة على اللوحة.

ما احتمال ألاّ يُصيب اللاعب الأول في ضربته الأولى أيًّا من قطع اللاعب الثاني؟

| القطعة | عدد الخانات |
|---|---|
| المدمِّرة | 2 |
| البارجة | 3 |
| الغوّاصة | 3 |
| سفينة التموين | 4 |
| حاملة الطائرات | 5 |

**18** رمى آزاد 5 أحجار نرد وحصل على ما هو ظاهر في الصورة المقابلة. قرّر الاحتفاظ بالمكعَّبات التي أظهرت 4 نقاط، ورمى المكعبين الآخرين من جديد.

أ ما احتمال أن يكون مع آزاد 5 مكعبات يُظهر كل منها 4 نقاط؟

ب ما احتمال أن يكون معه 4 مكعَّبات على الأقل تُظهر 4 نقاط؟

ج ما احتمال أن يكون معه 3 مكعَّبات فقط تُظهر 4 نقاط؟

د ما هي العلاقة بين أجوبة الأسئلة أ وَ ب وَ ج؟

**يحاول أحد الطلاّب أن يكسر كلمة السر التي تسمح بالدخول إلى حاسوب المدرسة. تتألف كلمة السر هذه من خمسة أرقام.**

**19** ما احتمال أن يتمكن الطالب من كسر كلمة السر إن كان مسموحًا تكرار الأرقام فيها؟

**20** ما احتمال أن يتمكن الطالب من كسر كلمة السر إن لم يكن مسموحًا تكرار الأرقام فيها؟

**21** ما احتمال أن يتمكن الطالب من كسر كلمة السر إن لم يكن مسموحًا تكرار الأرقام فيها ومجموع أرقامها يساوي 10؟

**22** $A$ وَ $B$ حدثان في تجربة عشوائية واحدة. $P(A)=0.4$ وَ $P(B)=0.5$ في حين أن $P(A\cap B)=0.2$ .

أ هل الحدثان مستقلان؟

ب جِد احتمال $P(A\cup B)$ .

**23** تتسابق ثلاثة جياد $A$ وَ $B$ وَ $C$. ما احتمال فوز كل حصان، علمًا بأن احتمال فوز $A$ هو ضعف احتمال فوز $B$، واحتمال فوز $B$ هو ضعف احتمال فوز $C$؟ ما احتمال فوز $B$ أو $C$؟

**24** زوجان في الستين من العمر. احتمال أن يصل الرجل إلى السبعين من عمره هو $\frac{1}{4}$، واحتمال أن تصل زوجته إلى السبعين من عمرها هو $\frac{1}{3}$.

أ ما احتمال أن يصلا معًا إلى السبعين؟

ب ما احتمال أن يصل أحدهما على الأقل إلى السبعين؟

ج ما احتمال ألاّ يصل أي منهما إلى السبعين؟

## نظرة إلى الوراء

**تم رمي مكعَّبي أعداد.**

**25** ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرَين 12؟

**26** ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرَين أقلّ من 5؟

**27** ما احتمال أن يكون أحد العددين الظاهرَين على الأقل فرديًّا؟

**28** ما احتمال أن يكون أحد العددين الظاهرَين على الأقل أصغر من 5؟

## نظرة إلى الأمام

**29** تقضي التجربة العشوائية برمي مكعَّبي أعداد: الواحد تلو الآخر، وتدوين مجموع العددين اللذين أظهرهما المكعَّبان. ما المجموع الذي لا يتغيّر احتمال الحصول عليه، أيًّا يكن العدد الذي أظهره المكعَّب الأول؟ ما هو هذا الاحتمال؟

# الـــــدوالّ Functions

تُستعمل الدوالّ في مسائل الحياة اليومية عبر استعمال الكميّات في التعبير عن التغيّرات وعن علاقة بين متغيّرين. مثال على ذلك: يمكن تمثيل العلاقة بين سرعة دوران القطار في أفعوانيّة والقوة التي تثبِّت الركاب في مقاعدهم بواسطة دالّة.

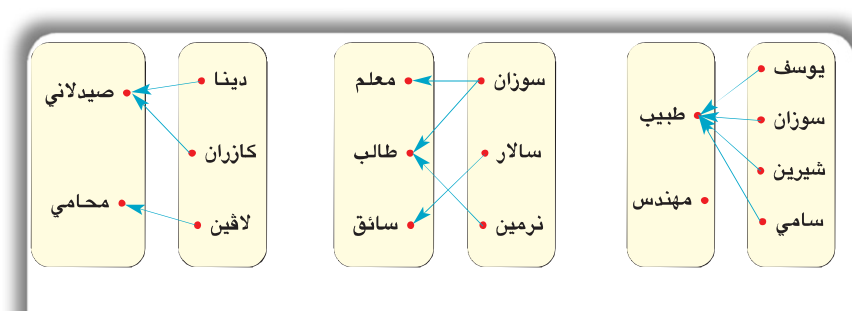
## الدروس

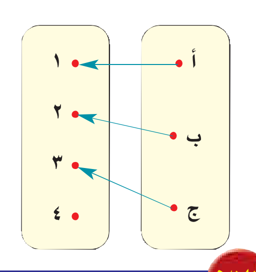
1. الدوال
2. الدوال الخطيّة
3. الصور المختلفة لمعادلة المستقيم
4. توازي المستقيمات وتعامدها
5. الدوال التربيعية

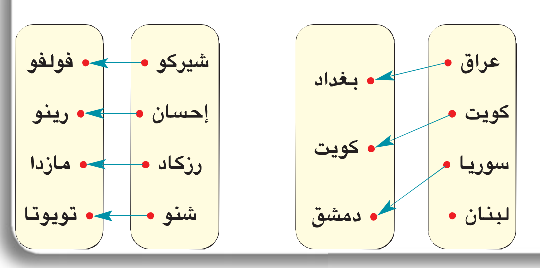
**كبير كالحوت**

يعتبر الحوت المحدّب من أكبر الحيوانات في العالم. يُمكنك استعمال الدوال لمقارنة قياسات هذه الحيتان مع أشياء مختلفة.

# الـــــدوالّ Functions




**لماذا؟**

نستعمل الدوالّ والعلاقات عادة لبناء نماذج رياضيّة تُعبّر عن واقع حياتي أو قانون علمي.

## الأهداف

- يمثّل بيانيًّا علاقة بين متغيّرين.
- يحدّد مجال العلاقة ومداها.
- يقرّر إن كانت العلاقة تشكّل دالّة.
- يحسب قيمة دالّة عندما يأخذ المتغيّر قيمة معيّنة.

## المفردات Vocabulary

علاقة Relation

متغيّر حر Indepenent Variable

متغيّر تابع Dependent Variable

جدول قيم Table of Values

مجال Domain

مدى Range

بيان Graph

دالة Function

صورة Image

## النشاط

### العلاقات والدوالّ Relations and Functions

1. فتح سليم دفتر الهاتف ووجد فيه:

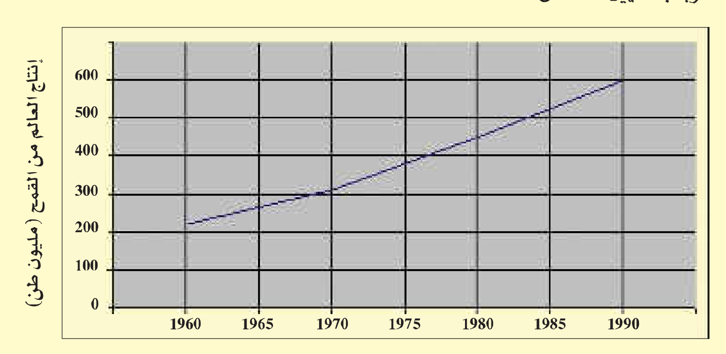
| الاسم | رقم الهاتف |
|---|---|
| شكري دهوكي | 235 246 |
| هيوا سليمان | 456 987 |
| خسرو هوليري | 852 369 |
| خسرو هوليري | 369 852 |
| ڤيان كركوكي | 741 236 |

ما رقم هاتف ڤيان كركوكي؟ ما رقم هاتف خسرو هوليري؟

2. استعمل الحاسبة لإكمال الجدول التالي الذي يعطيك مساحة الدائرة بدلالة قيَم مختلفة لنصف قطرها، ثم أوضح كيف أكملت الجدول.

| نصف القطر | 1 | 1.5 | 4 | 0.5 | 0.75 | 3 | 0 | 2.5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| المساحة | 3.14 | | | | | | | | |

3. يوضِّح الرسم البياني أدناه تطوّر الإنتاج العالمي للقمح في النصف الثاني من القرن العشرين محسوبًا بملايين الأطنان.




استخدم الرسم البياني لتقدير الإنتاج العالمي للقمح بغية إكمال الجدول التالي:

| السنة | 1960 | 1965 | 1970 | 1975 | 1980 | 1985 | 1990 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| كمية إنتاج القمح | | | | | | | |

4. يبيِّن الجدول التالي معدَّل درجات الحرارة في كركوك؛ خلال الأسبوع الأول من شهر يناير:

| أيام الأسبوع | السبت | الأحد | الاثنين | الثلاثاء | الأربعاء | الخميس | الجمعة |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| معدَّل الحرارة | 26 | 24 | 23 | 20 | 22 | 24 | 26 |

كم كان معدّل الحرارة يوم الأحد؟ كم كان معدّل الحرارة يوم الأربعاء؟ يوم الخميس؟

إذا تفحَّصت الأمثلة الأربعة السابقة تلاحظ أن كلاًّ منها يتضمّن متغيِّرين، وأن قيَم أحد هذين المتغيّرين تحدِّد قيَم الآخر.

**نقطة مراقبة** √ 5. أكمل الجدول التالي محدِّدًا في كل مثال المتغيِّر الأوَّل الذي تحدِّد قيَمه قيم المتغيِّر الثاني:

| المثال | المتغيّر الأول | المتغيّر الثاني |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |

تتحدّث عن وجود **علاقة Relation** بين متغيِّرين $x$ و $y$ إذا كانت قيم أحدهما، $x$ مثلاً، تحدِّد قيم الآخر، $y$. في هذه الحالة، تقول إن المتغيِّر الأول هو **المتغيّر الحر Independent Variable** وأن الثاني هو **المتغيّر التابع Dependent Variable**.

## Functions الدوالّ

في المثال الأول، تتردَّد في الإجابة عن السؤال: **ما رقم هاتف خسروهوليري ؟** لأن المتغيِّر الحر، **الاسم**، تقابله قيمتان للمتغيِّر التابع. أما في الأمثلة الأخرى، فإنك لا تواجه هذه المشكلة لأن كل قيمة من قيَم المتغيِّر الحر تقابلها قيمة وحيدة من قيَم المتغيِّر التابع.

تقول عن العلاقة بين المتغيِّرين $x$ و $y$ أنها **دالّة Function** إذا قابلت كل قيمة $a$ من قيَم المتغيِّر الحرّ $x$ قيمة وحيدة $b$ من قيَم المتغيِّر التابع $y$. هذه القيمة الوحيدة $b$ تُدعى **صورة Image** $a$ بالدالّة.

**نقطة مراقبة √** ادرس من جديد الأمثلة الأربعة، وحدِّد في كل حالة إن كانت **العلاقة دالّة** أم لا، وعلِّل جوابك.

### مثال 1

**هل تمثِّل معطيات الجدول دالّةً؟ أوضح ذلك.**

أ)

| قيَم المتغيِّر التابع | قيَم المتغيِّر الحر |
|---|---|
| −3.6 | 1 |
| −3.6 | 2 |
| 4.2 | 3 |
| 4.2 | 4 |
| 10.7 | 5 |
| 12.1 | 6 |
| 52 | 7 |

ب)

| قيَم المتغيِّر التابع | قيَم المتغيِّر الحر |
|---|---|
| 7 | 3 |
| 8 | 3 |
| 10 | 3 |
| 42 | 4 |
| 34 | 10 |
| 18 | 11 |
| 52 | 52 |

**الحـــل**

أ) تمثِّل معطيات الجدول الأول دالّة، فكل قيمة من قيَم المتغيِّر الحرّ تقابلها قيمة وحيدة من قيَم المتغيِّر التابع.

ب) لا تمثِّل معطيات الجدول الثاني دالّة، لأن القيمة 3 للمتغيِّر الحرّ تقابلها ثلاث قيم للمتغيّر التابع $y$ هي 7 و8 و10. يمثّل الجدول (ب) علاقة فقط.

## Different ways to define a function أشكال تعريف الدالّة

إذا نظرت إلى الأمثلة السابقة تلاحظ أن هناك عدة أشكال لتعريف الدالّة. يمكن تعريف الدالّة بواسطة:

**1. جدول قيَم Table of Values** تُعرَّف الدالّة في هذه الحالة بواسطة جدول من عمودين يحتوي الأول منهما على قيَم المتغيِّر الحرّ، والآخر على قيَم المتغيِّر التابع المقابلة لها، بحيث تُكتب قيمة المتغيِّر الحرّ وقيمة المتغيّر التابع المقابلة على الصف نفسه.

**مثال:** دالّة المثال 4.

لا تكون العلاقة المُعرّفة بواسطة جدول، دالّة، إذا احتوى عمود المتغيِّر الحر على قيمة تُقابلها قيمتان مختلفتان للمتغيِّر التابع.

من هنا فإن العلاقة المُعرّفة بواسطة جدول والواردة في المثال الأول ليست دالّة، لأن هناك قيمة للمتغيِّر الحرّ (خسرو هوليري) تقابلها قيمتان مختلفتان للمتغيِّر التابع (رقم الهاتف).

2. **قاعدة Rule**: تُعرَّف الدالّة بواسطة قاعدة أو قانون يعبِّر عن قيمة المتغيِّر التابع بدلالة المتغيِّر الحرّ.

**مثال**: دالّة المثال الثاني حيث يتم التعبير عن قيمة المتغيِّر التابع $A$ (مساحة الدائرة) بدلالة المتغيِّر الحرّ $r$ (نصف القطر). هذه القاعدة هي $A(r)=\pi r^2$ .

3. **رسم بياني أو بيان Graph**: تُعرّف الدالّة بواسطة رسم بياني أو بيان، بحيث تكون قيَم المتغيِّر الحرّ على المحور الأول وقيَم المتغيِّر التابع على المحور الثاني. يتمّ تحديد قيمة المتغيِّر التابع المقابلة للقيمة $x$ من قيَم المتغيِّر الحرّ بأنها الإحداثيّ الثاني للنقطة الموجودة على الرسم البياني، والتي إحداثيّها الأول $x$.

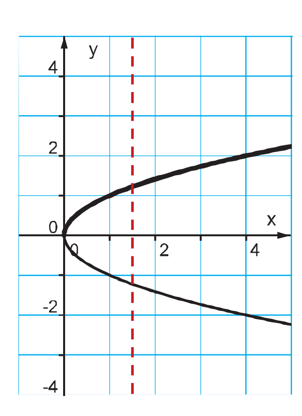
**مثال**: دالّة المثال الثالث.

**اختبار المستقيم العمودي Vertical Line Test**

إذا قطع مستقيم عموديّ رسمًا بيانيًّا في أكثر من نقطة، فإن هذا الرسم البيانيّ لا يمثِّل دالّة.

## مثـــال 2

**هل العلاقة المُعرَّفة بواسطة الرسم البياني المقابل دالّة؟**




**الحــل**

ليست العلاقة المعرَّفة بالرسم البياني المقابل دالة لأن كل قيمة موجبة $x$ تقابلها قيمتان للمتغيِّر التابع $y$، كما يبيِّن ذلك المستقيم العمودي الذي يقطع الرسم البياني في نقطتين مختلفتين.

## دراسة الدوالّ Studying Functions

لكي تدرّس دالّة ما، $f(x)$، عليك أن تقوم بما يلي:

1. تحديد مجموعة الأعداد الحقيقية للمتغيِّر الحرّ $x$ التي يمكن حساب صورتها $y=f(x)$. تُدعى هذه المجموعة **مجال تعريف الدالّة** أو باختصار **مجال الدالّة Domain**.
2. تحديد مجموعة الأعداد الحقيقية التي يغطّيها المتغيِّر التابع، وتُدعى **مدى الدالّة Range**.
3. تمثيل الدالة بيانيًّا. وهذا يعني تمثيل جميع الأزواج المرّتبة $(x,y)$ حيث ينتمي $x$ إلى مجال الدالّة وحيث $y=f(x)$ . تُدعى مجموعة النقاط هذه **الخط البياني** للدالّة أو **بيان الدالّة Graph**.
4. استخلاص خواص الدالّة عبر دراسة بيانها.

**كيف تُنشئ بيان الدالّة؟**

إذا كانت الدالّة مُعرَّفة بواسطة جدول قيم، مثِّلْ جميع النقاط $(x,y)$ الواردة في الجدول، ثم صلْ بين هذه النقاط بخط مناسب.

إذا كانت الدالّة مُعرَّفة بقاعدة، أنشئ جدول قيَم للدالة ومثِّل نقاطه ثم أنشئ البيان بالطريقة السابقة. كما يمكنك استعمال حاسبة بيانيّة أو حاسوب لإنشاء بيان الدالّة.

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** أوضح الفرق بين الدالّة والعلاقة. أعطِ مثالاً على رسم بياني لعلاقة ليست دالّة.

**2** اشرح ثلاث طرق لتعريف الدالّة.

**3** أوضح كيف تحدِّد مجال الدالّة المُعرَّفة بالخط البياني المقابل، وكيف تُحدِّد مداها.

## تمارين موجَّهة

**هل يُعرِّف الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.**

**4**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 5 | 3 |
| 8 | 4 |
| 5 | 7 |
| 9 | 2 |

**5**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 8 |
| 2 | 8 |
| 3 | −7 |

**6**

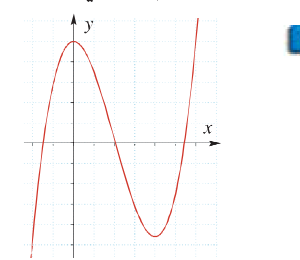
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | 7 |
| 20 | 11 |
| 30 | 9 |
| 40 | 7 |

**7**

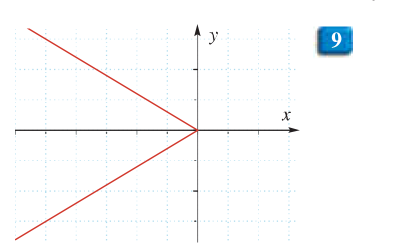
| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 3 | 9 |
| 2 | 2 |
| 8 | −3 |
| 2 | 1 |

**حدِّد إن كان الرسم البياني يمثّل دالّة أم لا، وعلّل جوابك.**

**8**




**9**

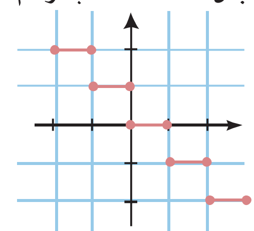


**تطبيقات**

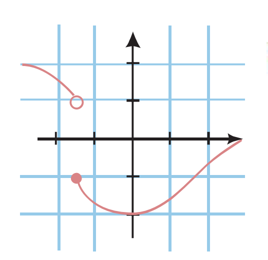
**10** **سيّارات** يمثِّل المتغيِّر $A$ السيّارات المرخَّص لها بالسير في مدينتك. ويمثِّل المتغيِّر $N$ اللوحات الرقمية لهذه السيارات. هل هناك علاقة بين $A$ وَ $N$؟ إذا كان الجواب «نعم»، فهل هي دالّة؟ أيّ المتغيِّرين هو المتغيِّر الحرّ وأيُّهما المتغيِّر التابع؟ علِّل جوابك؟

**حدِّد مجال الدالّة الممثَّلة بالرسم البياني ومداها.**

**11**



**12**



**13** احسب قيمة الدالّة $f(x)=x^2+2x-1$ عندما $x=3$ ، وعندما $x=1.5$ .

**تطبيقات**

**14** **مدخول** يتقاضى سبّاك 24 ألف دينار عن كل ساعة عمل، بالإضافة إلى 20 ألف دينار للكشف عن الأعطال.

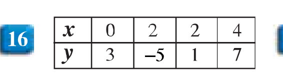
أ اكتب دالّة تمثِّل دخل السبّاك $R$ بدلالة عدد ساعات العمل $x$.

ب احسب دخل السبّاك إذا عمل 5.5 ساعات.

## تمارين وتطبيقات

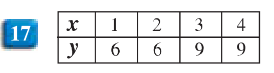
هل يُعرِّف الجدول دالّة؟ أوضح ذلك.

**15**



| $x$ | 0 | 2 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | −5 | 1 | 7 |

**16**

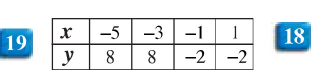


| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 6 | 9 | 9 |

**17**

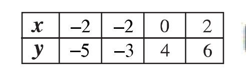
| $x$ | 4 | 4 | 6 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −2 | 2 | −3 | 3 |

**18**



| $x$ | −5 | −3 | −1 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 8 | −2 | −2 |

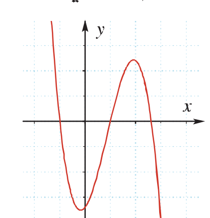
**19**



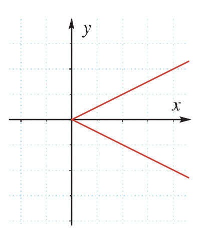
| $x$ | −2 | −2 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | −5 | −3 | 4 | 6 |

**هل يمثِّل الرسم البياني دالّة؟ أوضح ذلك.**

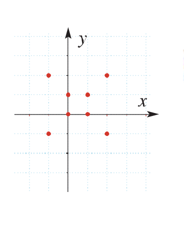
**20**



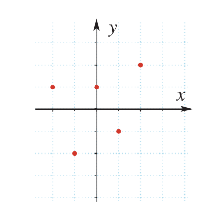

**21**



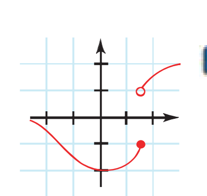

**22**



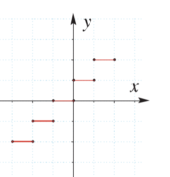

**23**




**24**



**25**



**احسب قيمة الدالّة بالتعويض.**

**26** $f(x)=2x-6$ عندما $x=1$ وعندما $x=3$ .

**27** $f(x)=5-3x$ عندما $x=1$ وعندما $x=3$ .

**28** $f(x)=\frac{2x-1}{5}$ عندما $x=-9$ وعندما $x=1$ .

**29** $f(x)=\frac{x-4}{5}$ عندما $x=-9$ وعندما $x=9$ .

**30** $f(x)=2x^2-3x$ عندما $x=3$ وعندما $x=-2.5$ .

**31** $f(x)=x^2+4x-1$ عندما $x=2$ وعندما $x=1.5$ .

**32** $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ عندما $x=-1$ وعندما $x=\frac{3}{4}$ .

**33** $f(x)=-4x^2$ عندما $x=\frac{3}{2}$ وعندما $x=-2$ .

**أنشئ بيان الدالّة باستعمال الحاسبة البيانيّة، ثم حدّد مجالها ومداها.**

**34** $y=-\frac{x}{2}$ **35** $y=-\frac{2}{3}x-5$ **36** $y=-2x^2$ **37** $y=2$

**38** $y=-6$ **39** $y=x^2$ **40** $y=x^2+2$

**41** أنشئ الخط البياني لدالّة يكون مجالها $-3\le x\le 3$ ومداها $-5\le y\le 5$ .

**42** أنشئ الخط البياني لدالّة يكون مجالها $-2\le x\le 5$ ومداها $0\le y\le 4$ .

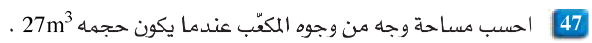
**تحــــــدٍّ**

**احسب قيمة الدالّة $f(t)=t^2-3$ في كل حالة.**

**43** $t=\sqrt{2}$ **44** $t=\sqrt{2}-1$ **45** $t=c+\sqrt{2}$

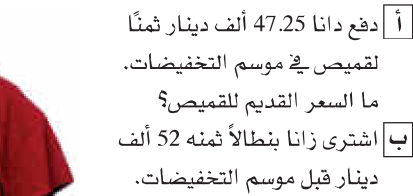
**هندسة** ارمز بالمتغيّر $V$ إلى حجم المكعّب المقابل.

**46** اكتب الدالّة التي تعطيك حجم المكعب $V$ بدلالة طول ضلعه $x$ .



**47** احسب مساحة وجه من وجوه المكعّب عندما يكون حجمه $27\text{m}^3$ .

**48** **استهلاك** أعلن متجر لبيع الملابس تخفيضًا قيمته 30% على جميع الألبسة.



أ دفع دانا 47.25 ألف دينار ثمنًا لقميص في موسم التخفيضات. ما السعر القديم للقميص؟

ب اشترى زانا بنطالاً ثمنه 52 ألف دينار قبل موسم التخفيضات. ما ثمنه الجديد؟

## نظرة إلى الوراء

**49** يبيّن الجدول أدناه بالملايين أعداد الذين تركوا الدراسة وأعمارهم بين 21 سنة وَ 24 سنة.

أ ما احتمال أن يكون متخرِّج من مستوى ماجستير أو دكتوراه يعمل؟

ب ما احتمال أن يكون شخص جرى اختياره عشوائيًّا من مستوى قبل الثانوي ولا يعمل؟

| عمالة المتخرّجين 21 – 24 سنة (ألف) | | |
|---|---|---|
| المستوى التعليمي | يعملون | لا يعملون |
| قبل الثانوي | 1.060 | 0.834 |
| ثانوي | 2.793 | 1.157 |
| مهني | 4.172 | 1.634 |
| بكالوريوس | 1.53 | 0.372 |
| ماجستير أو دكتوراه | 0.104 | 0.041 |

**50** احسب المقدار $3[2-(5-3)-7]\div 2$ باستعمال ترتُّب المعمليات.

## نظرة إلى الأمام

**51** أنشئ الرسم البياني للعلاقة $y=x^2-2x-10$ بين $x$ وَ $y$. أوضح لماذا تمثّل هذه العلاقة دالّة. حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.

# الدوالّ الخطّية Linear Functions

**لماذا؟** الدالّة الخطّية هي الأبسط بين الدوال الجبريّة. كما أنها تُستعمل كثيرًا في بناء نماذج رياضيّة لأوضاع في الحياة اليومية.

**الأهداف**

- يتعرّف الدالّة الخطّية.
- يستعمل الدالّة الخطّية لبناء نماذج رياضيّة.
- يحدّد مجال الدالّة الخطّية ومداها، ويحدّد تقاطعاتها مع محوري الإحداثيات.

**تطبيقات**
فيزياء

**المفردات Vocabulary**

دالة خطية Linear function

ميل Slope

## النشاط

### استكشاف الدالّة الخطّية Exploring linear function

تعرف أن درجة غليان الماء هي 100 درجة مئوية. لكنك قد تجهل أن 100 درجة مئوية هي درجة غليان الماء في مكان يقع عند مستوى البحر (أي إن ارتفاعه عن سطح البحر صفر). تتغيَّر درجة غليان الماء بتغيُّر ارتفاع المكان عن سطح البحر. فهذه الدرجة في جبال الهملايا تقل عن 100 درجة مئوية، بينما تزيد على 100 درجة مئوية في البحر الميت.

يُبيّن الجدول التالي مواقع في العالم وارتفاع كل منها، عن سطح البحر، ودرجة غليان الماء فيه.

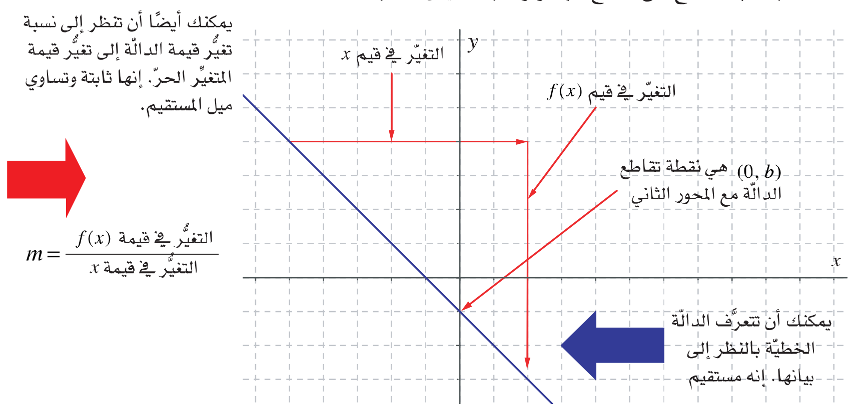
| الموقع | الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار | درجة غليان الماء |
|---|---|---|
| جدّة | 0 | 100 |
| فريبورغ (سويسرا) | 586 | 99.68 |
| صوفر (لبنان) | 1 250 | 99.135 |
| كولورادو سبرنغز (أمريكا) | 1 832 | 98.995 |
| القرنة السوداء (لبنان) | 3 220 | 98.23 |
| البحر الميت | −420 | 100.23 |

1. مثِّل معطيات الجدول في المستوي الإحداثي محمِّلاً المحور الأول قيَم الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار، والمحور الثاني درجات الحرارة على المقياس المئوي.
2. صل بين النقاط بقطع مستقيمة. ماذا تلاحظ؟
3. هل العلاقة بين الارتفاع عن سطح البحر ودرجة غليان الماء دالّة؟ أوضح ذلك.
4. استعمل الرسم البياني الذي حصلت عليه، لتقدير درجة غليان الماء على ارتفاع 3000m عن سطح البحر.
5. استعمل الرسم البياني الذي حصلت عليه، لتقدير ارتفاع مكان عن سطح البحر، علمًا بأن درجة غليان الماء فيه 97 درجة.
6. أين يقطع بيان الدالّة المحور الثاني؟ ماذا تمثِّل هذه النقطة؟

## الدالّة الخطّية Linear Function

**الدالّة الخطّية** هي دالّة بيانها عبارة عن خطّ مستقيم.
تُكتب قاعدة الدالّة الخطّية على الشكل التالي: $f(x)=mx+b$

يمكنك استعمال الدوالّ الخطّية لبناء نموذج رياضي لبعض العلاقات بين متغيِّرين مثل العلاقة السابقة (الارتفاع عن سطح البحر ودرجة غليان الماء).

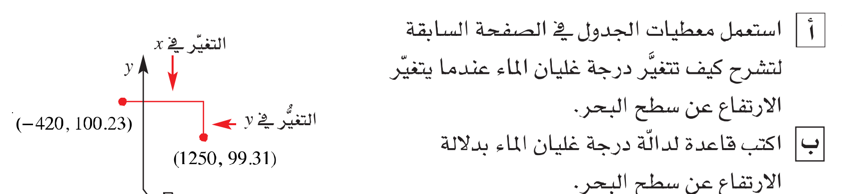



تبقى نسبة تغيُّر قيمة الدالّة الخطّية $f(x)$ إلى تغيُّر قيمة $x$ ثابتة، وتُدعى هذه النسبة **ميل Slope** الدالّة الخطّية.

### مثال 1

أ استعمل معطيات الجدول في الصفحة السابقة لتشرح كيف تتغيَّر درجة غليان الماء عندما يتغيّر الارتفاع عن سطح البحر.

ب اكتب قاعدة لدالّة درجة غليان الماء بدلالة الارتفاع عن سطح البحر.




#### الحل

أ استعمل $x$ للدلالة على الارتفاع (بالأمتار) عن سطح البحرِ وَ $y$ للدلالة على درجة غليان الماء بالمقياس المئوي. استعمل قيمتين للمتغيِّر الحر $x$ وقيمتَي الدالّة المقابلتين لهما. مثلاً ارتفاع صوفر في لبنان والبحر الميت في الأردن. احسب نسبة تغيّر درجة غليان الماء إلى تغيّر الارتفاع عن سطح البحر للحصول على الميل.

$$m=\frac{\text{تغيّر الدالّة}}{\text{تغيّر } x}=\frac{99.31-100.23}{1250-(-420)}=0.00055$$

هذا يعني أن زيادة متر واحد في الارتفاع عن سطح البحر تؤدّي إلى تغيُّر في درجة غليان الماء مقداره $-0.00055$ درجة.

ب الارتفاع × $m$ + درجة غليان الماء عند سطح البحر = درجة غليان الماء

$f(x) \quad = \quad 100 \quad +(-0.00055)x$

قاعدة الدالّة إذاً، $f(x)=100-0.00055x$

**تفكير ناقد** هل تزيد درجة غليان الماء إذا زاد الارتفاع عن سطح البحر أم تنقص؟ أوضح كيف تستعمل الجدول في أول الدرس للإجابة عن هذا السؤال. أوضح كيف تستعمل بيان الدالّة $f(x)=100-0.00055x$ للإجابة عن السؤال.

**تحـــــدٍّ** وجدت ليلى قاعدة الدالة الخطية كما هو مبين في المقابل.
اشرح طريقة ليلى.
استعمل موقعين آخرين في الجدول لإيجاد قاعدة الدالة.
هل تحصل على القاعدة نفسها؟

$m=-0.00055$
$f(x)=mx+b$
$100=-0.00055(0)+b$
$100=b$
إذًا، قاعدة الدالّة هي:
$f(x)=-0.00055x+100$

**مثـــــال** 2 احسب $f(9)$ حيث $f(x)=\frac{1}{3}x+17$ . ما قيمة $x$ إذا كان $f(x)=-1$ ؟

**الحـل**

عوّض عن $x$ بالقيمة 9.

$$f(9)=\frac{1}{3}\times 9+17$$
$$=3+17$$
$$=20$$

عوّض عن $f(x)$ بالقيمة $-1$ وحُلّ

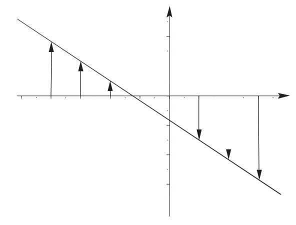
$$f(x)=\frac{1}{3}x+17$$
$$-1=\frac{1}{3}x+17$$
$$-18=\frac{1}{3}x$$
$$-54=x$$

**تحـــــدٍّ** أوضح كيف تستعمل دالّة المثال 1 لكي تحدِّد درجة غليان الماء في موقع يرتفع 8000m عن سطح البحر. حدِّد هذه الدرجة.

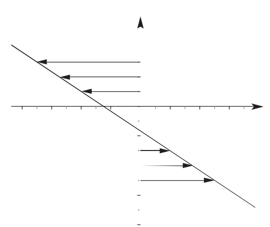
**تحـــــدٍّ** أوضح كيف تستعمل دالّة المثال 1 لكي تحدِّد ارتفاع موقع عن سطح البحر تبلغ درجة غليان الماء فيه 85 درجة مئوية. حدِّد هذا الارتفاع.

## دراسة الدالّة الخطّية Studying linear function

تسمح قاعدة الدالّة الخطّية $f(x)=mx+b$ بحساب قيمة الدالّة أيًّا تكن قيمة المتغيِّر $x$. ينتج من ذلك أن $f(x)$ معرّفة أيًّا كانت قيمة $x$، وأن مجالها، بالتالي، هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة. من ناحية أخرى، يمكن لكل عدد حقيقي أن يكون قيمة للدالّة الخطّية، لأنك تستطيع حساب قيمة المتغيِّر $x$، إذا عرفت قيمة الدالّة. ينتج من ذلك أن مدى الدالّة الخطّية هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة.



يُظهر بيان الدالة الخطّية أن مجالها يغطّي المحور الأول بكامله.



يُظهر بيان الدالّة الخطّية أن مداها يغطّي المحور الثاني بكامله.

عندما تمثّل الدالّة حالة من الحياة اليومية، فمن شأن ذلك أن يحدّ من مجالها ومن مداها.

**مثـــــال** 3

تعتبر قمة إيفرست الواقعة في جبال الهملايا، والتي ترتفع 8848m عن سطح البحر، أعلى موقع على وجه الأرض. كما يُعتبر البحر الميت، والذي ينخفض 420m عن سطح البحر، أدنى موقع برّي على وجه الأرض. استعمل المعلومتين السابقتين لتحدِّد بدقّة مجال دالّة المثال 1 ومداها.

**الحــل**

تشكِّل دالّة المثال 1 نموذجًا رياضيًّا لحالة من الواقع. ينتج من ذلك أن المتغيِّر الحرّ $x$ محدَّد بقيمٍ معيَّنة. فهو، بالاستناد إلى المعلومتين السابقتين، يتّخذ القيَم التي تقع بين $-420$ وَ 8848 لذا، فإن مجال دالة المثال الأول هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقِّق المتباينة $-420 \leq x \leq 8848$ .
لكي نحدِّد مدى هذه الحالة، نلاحظ أن قيمتها تتناقص كلما ازدادت قيمة $x$. هذا يعني أن أعلى قيمة لها تقابل أدنى قيمة للمتغيِّر الحرّ، أي: $f(-420)=100.23$ وأن أدنى قيمة لها تقابل أعلى قيمة للمتغيِّر $x$ أي $f(8848)=95.13$ . هكذا، فإن مدى دالّة المثال الأول هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقّق $95.13 \leq y \leq 100.23$ .

# التمارين

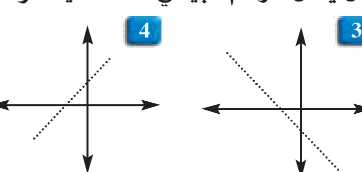
## التواصل في الرياضيات

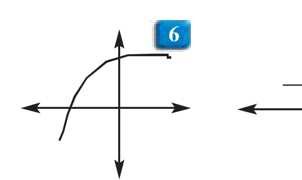
1 كيف تتحقَّق من أن نقطة تعرف إحداثيَّيها تقع على مستقيم تعرف معادلته؟

2 أوضح كيف تجد قاعدة دالّة خطيّة بمعرفة بيانها.

**هل يُمثِّل الرسم البياني دالّة خطيّة؟ أوضح ذلك.**

3 4 5 6





## تمارين موجّهة

**هل الدالّة خطّية؟ أوضح ذلك.**

7 $f(x)=2-x^2$ 8 $f(x)=-3x-6$ 9 $g(x)=4+10x$

10 $f(x)=x^3-x$ 11 $f(x)=\frac{3}{2}x+4$ 12 $g(x)=\frac{1}{x}$

**تطبيـــقات**
رياضيات المستهلك

13 يبيِّن الجدول أدناه كلفة مخابرات الهاتف الدولية، بما فيها الرسم الثابت وقيمته ألفا دينار.

| عدد الدقائق | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| الكلفة بالألف دينار | 2.50 | 3.00 | 3.50 | 4.00 | 4.50 | 5.00 |

استعمل الجدول لكي تكتب دالّة. حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.

**14** يُظهر الشكل المقابل بيان دالّة خطّية.
أنشئ جدول قيَم لها، واكتب قاعدتها.

**أكمل الزوج المرتَّب بحيث تقع النقطة على المستقيم $y=-4x+21$ .**

**15** $(5, ?)$ **16** $(?, 9)$

**17** $(0, ?)$ **18** $(?, 0)$

## تمارين وتطبيقات

أكمل الزوج المرتَّب بحيث تقع النقطة على المستقيم $y=2x-14$ .

**19** $(8, ?)$ **20** $(10, ?)$ **21** $(0, ?)$ **22** $(?, 0)$

**23** $(5, ?)$ **24** $(-5, ?)$ **25** $(3, ?)$ **26** $(?, 3)$

**27** $(?, 6)$ **28** $(?, -4)$ **29** $(?, -7)$ **30** $(?, 10)$

**31** **هندسة إحداثية** يبيِّن الرسم البياني العلاقة بين عدد الألعاب الإلكترونية (بين 0 وَ30) وثمنها. أنشئ جدول قيم لهذه الدالّة، واكتب قاعدتها.

**32** **سيّارات** عندما تملأ خزان الوقود لسيارتك، فإن كمية الوقود في الخزان تشكِّل دالّة متغيِّرها الحرّ هو عدد الدقائق. افترض أن الوقود الذي يصب في الخزان يتم بمعدَّل 18 لترًا في الدقيقة وأن سعة الخزّان تبلغ 35 لترًا.

أ اكتب قاعدة دالّة تمثِّل كمّية الوقود التي تصبّ في الخزان بدلالة الزمن.

ب حدِّد مجال هذه الدالّة ومداها.

**33** تسلية يبيع نادي الحياة أقراصًا مدمجة كما هو مبيَّن في الجدول التالي بما فيها رسم الانتساب للنادي والبالغ 35 الف دينار.

| عدد الأقراص | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الكلفة (ألف دينار) | 35 | 51 | 67 | 83 | 99 | 115 | 131 | 147 |

اكتب دالّة تمثّل الأمر.

**34** تكنولوجيا استعمل حاسبة بيانيّة لرسم بياني دالتي التمرينين السابقين في المستوى الإحداثي نفسه. قارن بين العرضين. أي نادٍ يقدِّم العرض الأفضل؟ أوضح ذلك.

## نظرة إلى الوراء

**أنشئ جدول قيَم لكلّ دالّة بالتعويض عن $x$ بالقيم 1، 2، 3، 4، 5، 10. وارسم بيانها.**

**35** $y=2x+1$

**36** $y=5x-1$

**احسب ذهنيًا القيمة العدديّة لكل مقدار.**

**37** $300-196$

**38** $10\times30$

**39** $\frac{480}{16}$

**40** $1\,000\times1\,000$

## نظرة إلى الأمام

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 |

**41** ادرس الجدول أعلاه. هل يمثّل دالّة خطّية؟

**42** اكتب قاعدة للعلاقة بين $x$ وَ $y$. مثّل معطيات الجدول بيانيًّا وتحقَّق من إجابتك السابقة.

# الصور المختلفة لمعادلة المستقيم

## Various forms of the equation of a line

**لماذا؟**

تؤدي معادلة المستقيم دورًا مهمًا في الرياضيات. إنها تمثّل أبسط الدوالّ الجبريّة. كما أنها تستعمل لبناء نماذج للكثير من مسائل الحياة.

**الأهداف**

- يتعرّف مختلف صور معادلة المستقيم.
- يكتب معادلة مستقيم على صورها المختلفة.

**المفردات**
**Vocabulary**

صورة الميل – التقاطع
Slope - Intercept form

صورة الميل – النقطة
Slope - Point form

التقاطع العمودي
y - Intercept

التقاطع الأفقي
x - Intercept

صورة النقطتين
Two - points Form

الصورة العامة
Standard Form

### النشاط 1

**معادلة المستقيم . صورة المَيل–التقاطع**    **Slope-Intercept Form**

قصد نوزاد شركة لتأجير السيّارات. ذكر له موظّف الشركة أن عليه دفع 100 ألف دينار عند تسلُّم السيّارة وَ 1.5 ألف دينار عن كل كيلومتر يقطعه.

1. أكمل الجدول التالي:

| عدد الكيلومترات | 10 | 20 | 30 | |
|---|---|---|---|---|
| المتوجِّب دفعه | $1.5\times10+100$ | | | |

2. اكتب معادلة تمثِّل المبلغ المتوجِّب دفعه $y$ بدلالة عدد الكيلومترات $x$.
3. مثِّل هذه المعادلة بيانيًّا.

**تطبيقات**
**تجارة**

### صورة المَيل–التقاطع Slope - Intercept Form

معادلة المستقيم على صورة المَيل–التقاطع هي: $y=mx+b$ حيث يمثِّل $m$ وَ $b$ عددين حقيقيين. العدد $m$ هو **مَيل المستقيم Slope** وَ $b$ هو الإحداثيّ الثاني لنقطة تقاطع المستقيم مع المحور الثاني، أو **التقاطع العمودي y- intercept** للمستقيم.

**مثـــال** 1

حدِّد ميل المستقيم وتقاطعه العمودي.

أ $y=3x-4$ ب $y=-5x+3$ ج $y=5$

**الحــل**

أ المَيل 3 والتقاطع $-4$ .

ب المَيل $-5$ والتقاطع 3.

ج المَيل 0 والتقاطع 5.

**حــاولْ** ارسم المستقيم الذي يمثِّل المعادلة $y=2x-8$ .

## النشاط 2

### صورة المَيل–النقطة Slope - Point Form

إذا عرفت ميل المستقيم $m$ ونقطة يمر بها $(h, k)$، فإنك تستطيع أن تكتب معادلته.

1. معادلة المستقيم على صورة المَيل–التقاطع هي $y=ax+b$ . ما العلاقة بين الميل $m$ ومعامل $x$ في هذه المعادلة؟
2. اكتب أن المستقيم يمر بالنقطة $(h, k)$ بالتعويض عن $x$ بقيمته $h$ وعن $y$ بقيمته $k$.
3. حُلّ المعادلة واستنتج قيمة $b$ بدلالة $m$ وَ $h$ وَ $k$.
4. عوِّض عن $b$ بقيمته، واكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل–التقاطع.

### صورة المَيل–النقطة Slope - Point Form

معادلة المستقيم على صورة المَيل–النقطة هي $y-y_1=m(x-x_1)$ حيث

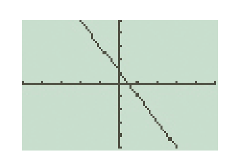
- $m$ هو مَيل المستقيم.
- $(x_1, y_1)$ نقطة يمر بها المستقيم.

**مثـــال** 2

اكتب معادلة مستقيم مَيله $-2$ ويمر بالنقطة $(1,-1)$، ثم ارسمه.

**الحــل**

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-(-1)=-2(x-1)$$
$$y+1=-2x+2$$
$$y=-2x+1$$



**حــاولْ** اكتب معادلة مستقيم مَيله 3 ويمر بالنقطة $(-2, -1)$، ثم ارسمه.

## النشاط 3

### صورة النقطتين Two Points Form

اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(5, 3)$ وَ $(7, 4)$ .

1. احسب مَيل المستقيم.
2. اكتب معادلته على صورة المَيل-النقطة ثم على صورة المَيل-التقاطع.

**صورة النقطتين Two Points Form**

معادلة المستقيم المار في النقطتين $(x_1, y_1)$ وَ $(x_2, y_2)$ هي

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

**حاول** اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(5, 65)$ وَ $(7, 71)$ على صورة المَيل-التقاطع.

### الصورة العامة Standard Form

## النشاط 4

### الصورة العامة Standard Form

**تطبيقات تسلية**

حدّدت إدارة حديقة الحيوانات رسم الدخول بعشرة آلاف دينار للكبار وخمسة آلاف دينار للصغار. بلغت حصيلة يوم الأربعاء 350 1 ألف دينار.

1. استعمل $x$ للدلالة على عدد الكبار وَ $y$ للدلالة على عدد الصغار. اكتب معادلة تعبِّر عن أن حصيلة يوم الأربعاء كانت 350 1 ألف دينار.
2. أكمل الجدول لإنشاء أزواج مرتَّبة تحقِّق المعادلة.
3. مثِّل بيانيًّا المعادلة التي حصلت عليها باستعمال الأزواج المرتبة. ما شكل الرسم البياني؟
4. تحقّق من جوابك بخصوص شكل الرسم البياني عن طريق حل المعادلة لكتابة $y$ بدلالة $x$.

**نقطة مراقبة √**

جدول قيَم

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 50 | |
| | 120 |
| | 70 |
| 120 | |

**الصورة العامة Standard Form**

معادلة المستقيم على الصورة العامة هي $ax + by = c$ حيث:

- $a$ وَ $b$ وَ $c$ أعداد حقيقية.
- أحد العددين $a$ وَ $b$ على الأقل لا يساوي 0.

## مثال 3

اكتب كل معادلة مستقيم على الصورة العامة:

أ $y = -2x + 3$ ب $x = -13y + 4$ ج $\frac{3}{4}x - 2 = 3y$

**الحل**

أ
$y = -2x + 3$
$2x + y = 3$

ب
$x = -13y + 4$
$x + 13y = 4$

ج
$\frac{3}{4}x - 2 = 3y$
$\frac{3}{4}x - 2 - 3y = 0$
$\frac{3}{4}x - 3y = 2$

هذه الصورة هي الصورة العامّة لأنها تُكتب $\frac{3}{4}x + (-3)y = 2$

**مثــــــال 4** اكتب كل معادلة مستقيم على صورة المَيل-التقاطع.

أ $2y-2x=6$ ب $6x+4y=4$ ج $\frac{3}{4}y-6x=3$

**الحـل**

أ
$$2y-2x=6$$
$$2y=2x+6$$
$$y=x+3$$

ب
$$6x+4y=4$$
$$4y=-6x+4$$
$$y=-\frac{3}{2}x+1$$

ج
$$\frac{3}{4}y-6x=3$$
$$\frac{3}{4}y=6x+3$$
$$y=8x+4$$

**حــاولْ** اكتب المعادلة $y-23=5(x-4)$ على صورة المَيل-التقاطع، ثم على الصورة العامة.

### المستقيمات الأفقية والعمودية Horizontal and Vertical Lines

معادلة مستقيم أفقي هي $y=b$ حيث يمثِّل $b$ تقاطع المستقيم مع المحور الثاني.
مَيل المستقيم الأفقي هو دائمًا 0.
معادلة مستقيم عمودي هي $x=b$ حيث يمثِّل $b$ تقاطع المستقيم مع المحور الأول.
مَيل المستقيم العمودي غير معرَّف.

### مختلف صور معادلة المستقيم Various Form of the Equation of a Line

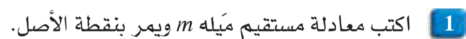
| اسم الصورة | شكل الصورة | مثال |
|---|---|---|
| المَيل-التقاطع | $y=mx+b$ | $y=3x+5$ |
| العامة | $ax+by=c$ | $3x-2y=5$ |
| المَيل-النقطة | $y-y_1=m(x-x_1)$ | $y-2=-3(x-1)$ |
| النقطتين | $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$ | $y-65=\frac{71-65}{7-5}(x-5)$ |

# التمــــارين

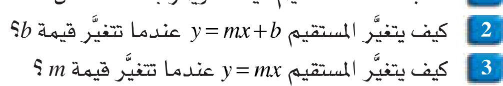
## التواصل في الرياضيات

1 اكتب معادلة مستقيم مَيله $m$ ويمر بنقطة الأصل.

2 كيف يتغيَّر المستقيم $y=mx+b$ عندما تتغيَّر قيمة $b$؟



3 كيف يتغيَّر المستقيم $y=mx$ عندما تتغيَّر قيمة $m$ ؟



4 كيف تستعمل صورة المَيل-النقطة لكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1, 1)$ وَ $(-2, 4)$ ؟

5 أوضح كيف تكتب معادلة المستقيم في الشكل المقابل.

6 كيف تكتب المعادلة $3x+3y+2=0$ على صورة المَيل-التقاطع؟

## تمارين موجَّهة

اكتب كل معادلة مستقيم على الصورة العامة.

**7** $y=3x+7$ **8** $2y=3x-4$ **9** $3x=-7y-17$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع بمعرفة ميله ونقطة يمر بها.

**10** الميل $2$ النقطة $(3, 4)$

**11** الميل $-2$ النقطة $(-3, 4)$

**12** الميل $\frac{1}{3}$ النقطة $(3, -4)$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع، وعلى الصورة العامة.

**13** $y-50=8(x-4)$ **14** $3y=9x+15$ **15** $y=10(-4x+3)$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع بمعرفة نقطتين يمر بهما.

**16** $(5,-2)$ وَ $(-2, 5)$ **17** $(-3, 3)$ وَ $(-4, 4)$ **18** $(3, 2)$ وَ $(-3, -2)$

## تمارين وتطبيقات

حدِّد تقاطع المستقيم مع محورَي الإحداثيات.

**19** $y=4x+5$ **20** $y=8x-1$ **21** $y=-3x+5$

**22** $y=-2x+13$ **23** $y=17x-4$ **24** $y=-5x-9$

**25** $y+x=10$ **26** $3x-2y=12$ **27** $5x+4y=12$

**28** $4x-5y=20$ **29** $2x-7y=14$ **30** $9x+y=18$

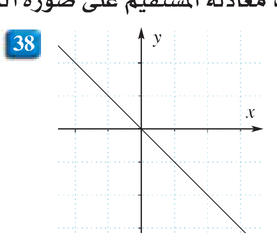
حدِّد مَيل المستقيم وتقاطعه مع المحور الثاني، من دون رسم.

**31** $y=-5x$ **32** $y=-5x+3$ **33** $y=7$

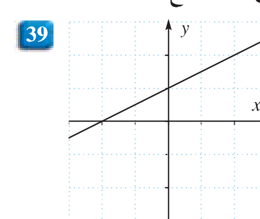
**34** $x=7$ **35** $y=7-x$ **36** $y=\frac{1}{3}x-5$

اكتب معادلة المستقيم على صورة المَيل-التقاطع.

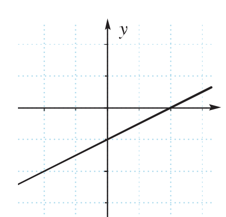
**37**




**38**




**39**




**40** ما ميل مستقيم معادلته $6x+2y=40$ ؟

لا يمكن كتابة معادلة المستقيم $x=4$ على صورة المَيل-التقاطع لأن ميله غير مُعرَّف. لكن يمكن كتابتها على الصورة $1\times x+0\times y=4$ . أكمل الجدول:

| | المعادلة المعطاة | صورة المَيل-التقاطع | الصورة العامة |
|---|---|---|---|
| **41** | $x=1$ | | |
| **42** | $y=4$ | | |
| **43** | $x+y=5$ | | |
| **44** | $y=4x$ | | |
| **45** | $x=4y$ | | |

**تحــــــدٍّ**

46 ارسم المستقيمين $4x+2y=12$ وَ $2x+y=10$. ماذا تلاحظ؟

**تطبيـــقات**

47 **بيئة** افترض أن ارتفاع الماء في حوض هو 35cm، وأن هذا الارتفاع يزداد بمعدَّل 5cm يوميًّا. اكتب معادلة تمثِّل ارتفاع الماء $h$ وعدد الأيام $d$. مثِّل هذه المعادلة بيانيًّا. بعد كم يوم يصبح ارتفاع الماء 260cm ؟

**تطبيـــقات**

48 **تجارة** ثمن تذكرة الدخول إلى حفل نهاية السنة الدراسيةً 5000 دينار للكبار وَ3000 دينار للصغار. اكتب معادلة تبيّن حصيلة الحفلة التي بلغت 700 000 دينار، مستعملاً $x$ للدلالة على عدد الكبار، وَ $y$ للدلالة على عدد الصغار. ما ميل المستقيم الذي يمثِّل هذه المعادلة؟ وما تقاطعه مع المحور الثاني؟

## نظرة إلى الوراء

49 اكتب قاعدة حساب محيط الدائرة $P$ بدلالة نصف قطرها $r$، ثم استعمل هذه القاعدة لتحسب محيط دائرة شعاعها 8cm استعمل العدد 3.14 قيمة تقريبية للعدد $\pi$.

**انسخ الجدول ثم أكمله. اكتب الكسور على أبسط صورة.**

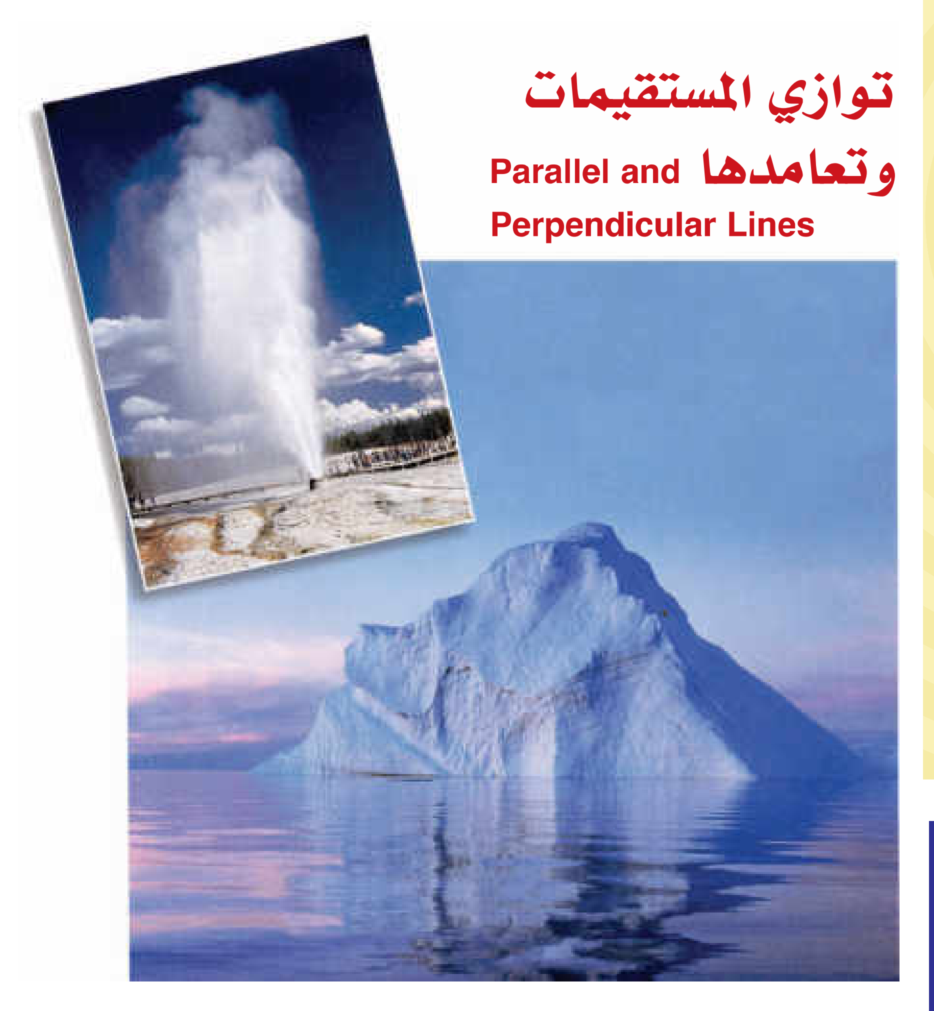
**تطبيـــقات**

| | الصورة الكسرية | الصورة العشرية | العدد كنسبة مئوية |
|---|---|---|---|
| 50 | | $0.\overline{3}$ | $33\frac{1}{3}\%$ |
| 51 | | 0.875 | |
| 52 | | | 2% |
| 53 | $\frac{1}{20}$ | | |
| 54 | | | $12\frac{1}{2}\%$ |
| 55 | $\frac{2}{3}$ | | |
| 56 | $\frac{1}{6}$ | | |
| 57 | | | 0.01% |
| 58 | | 0.80 | |
| 59 | $\frac{2}{5}$ | | |

## نظرة إلى الأمام

60 ارسم، في المستوى الإحداثيّ نفسه، المستقيمين $y=2.12x-3.7$ وَ $y=x+5.4$ . حدِّد إحداثيي كل نقطة تقاطع ممكنة بينهما.

# توازي المستقيمات وتعامدها
# Parallel and Perpendicular Lines



**الأهداف**

- يميِّز توازي مستقيمين أو تعامدهما بمقارنة مَيلَيهما.
- يكتب معادلة مستقيم موازٍ لمستقيم، أو متعامد معه.

**لماذا؟**

يشكّل تعرُّف المستقيمات المتوازية أو المتعامدة عن طريق مقارنة ميولها خطوة مهمّة لتمييز العلاقات بين المستقيمات من دون اللجوء إلى رسمها.

**تطبيقات فيزياء**

يبدو الماء بمظاهر مختلفة وفقًا لدرجات حرارته. فهو يتجمَّد على درجة حرارة منخفضة جدًّا كما يبيِّن ذلك جبل الثلج في الصورة، أو يتحوّل إلى بخار على درجة حرارة عالية كما يبيِّن ذلك البخار المتصاعد من الأرض.

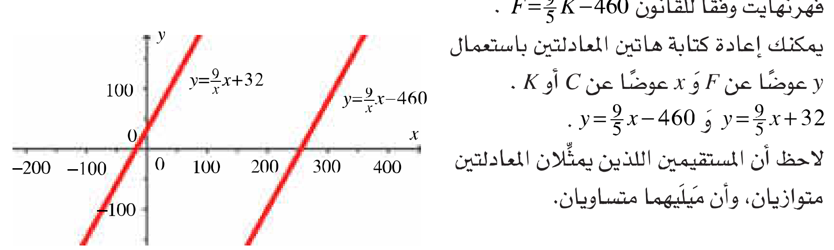
| | فهرنهايت | مئوي | كالفن |
|---|---|---|---|
| غليان الماء | 212 | 100 | 373 |
| تجمّد الماء | 32 | 0 | 273 |
| الصفر المطلق | −460 | −273 | 0 |

يبيِّن الجدول المقابل درجات حرارة على ثلاثة مقاييس: مقياس فهرنهايت والمقياس المئوي ومقياس كالفن. يتمّ تحويل درجات الحرارة من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت وفقًا للقانون $F=\frac{9}{5}C+32$ ومن مقياس كالفن إلى مقياس فهرنهايت وفقًا للقانون $F=\frac{9}{5}K-460$ .

يمكنك إعادة كتابة هاتين المعادلتين باستعمال $y$ عوضًا عن $F$ وَ $x$ عوضًا عن $C$ أو $K$ .

$y=\frac{9}{5}x+32$ وَ $y=\frac{9}{5}x-460$ .

لاحظ أن المستقيمين اللذين يمثِّلان المعادلتين متوازيان، وأن مَيلَيهما متساويان.



**المستقيمات المتوازية Parallel Lines**

إذا تساوى مَيلا مستقيمين فإنهما يتوازيان.
إذا توازى مستقيمان غير عموديين فإن مَيلَيهما يتساويان.

**مثال 1**

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الموازي للمستقيم $y=3x-7$ والذي يقطع المحور الثاني عند 4.**

**الحل**

مَيل هذا المستقيم هو 3. بما أنه يقطع المحور الثاني عند 4، فإن معادلته هي $y=3x+4$.

**حاول** اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الموازي للمستقيم $y=0.5x+5$ والذي يقطع المحور الثاني عند $-2$.

تذكّر أن مستقيمين يتعامدان إذا تقاطعا وشكّلا زوايا قائمة. سوف تستكشف في النشاط التالي العلاقة بين مَيلَي مستقيمين متعامدين.

## النشاط

**استكشاف العلاقة بين تعامد المستقيمات والمَيل Slope of Perpendicular Lines**

تحتاج في هذا النشاط إلى مسطرة قائمة وورقة بيانيّة عليها محورا المستوي الإحداثي.

1. هل يتقاطع المستقيمان $y=-2x+3$ وَ $y=0.5x-2$؟ أوضح ذلك.
2. ارسم هذين المستقيمين في المستوي الإحداثي نفسه وحدّد بيانيًّا إحداثيي نقطة تقاطعهما.
3. ما العلاقة بين المستقيمين في رأيك؟ استعمل المسطرة القائمة لتتحقق من جوابك.
4. اضرب مَيل المستقيم الأول في مَيل المستقيم الثاني. ما ناتج الضرب؟

**المستقيمات المتعامدة Perpendicular Lines**

إذا كان ناتج ضرب مَيلَي مستقيمين $-1$، فإنهما يتعامدان.
إذا تعامد مستقيمان فإن ناتج ضرب مَيلَيهما $-1$.

**مثال 2**

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الذي يقطع المحور الثاني عند 4 ويتعامد مع المستقيم $y=3x+2$.**

**الحل**

ميل المستقيم هو $-\frac{1}{3}$ لأنه يتعامد مع المستقيم $y=3x+2$ ذي المَيل 3. المعادلة المطلوبة هي $y=-\frac{1}{3}x+4$.

**حاول** اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم الذي يقطع المحور الثاني عند 6 ويتعامد مع المستقيم $y=4x+2$.

**مثـــــال 3**

**اكتب، على صورة الميل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(4, 5)$ والمتعامد مع المستقيم $2x+3y=7$ .**

الحــل

ابدأ بكتابة معادلة المستقيم المعطى على صورة المَيل-التقاطع: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$ . يجب أن يكون مَيل المستقيم المتعامد معه $\frac{3}{2}$ . وبما أن معادلة المستقيم على صورة المَيل النقطة هي $y-y_1=m(x-x_1)$ ، فإن المعادلة المطلوبة هي $y-5=\frac{3}{2}(x-4)$ .

**حـــاولْ** اكتب، على صورة المَيل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(3, -2)$ والمتعامد مع المستقيم $4x-2y=-6$ .

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1. أوضح كيف تكتب معادلة لمستقيم موازٍ للمستقيم $y=4x+3$ .
2. مستقيم مَيله $\frac{2}{3}$ . أوضح كيف تجد مَيل مستقيم متعامد معه.
3. كيف تحدِّد مَيل مستقيم متعامد مع المستقيم $y=\frac{1}{3}x+2$ ؟
4. أوضح كيف تجد معادلة مستقيم متعامد مع المستقيم $y=4x+3$ .

## تمارين موجّهة

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة لمستقيم يقطع المحور الثاني عند 5 ويوازي المستقيم المعطى.**

5. $y=2x+3$
6. $y=-3x$
7. $4y=x$
8. $y=-6x+2$

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة لمستقيم يقطع المحور الثاني عند 5 ويتعامد مع المستقيم المعطى.**

9. $y=3x-3$
10. $y=-3x$
11. $5y=x$
12. $-6y=x$

**اكتب، على صورة المَيل-النقطة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة $(4, 5)$ والمتعامد مع المستقيم المعطى.**

13. $2x+3y=4$
14. $x-3y=8$
15. $-2x-8y=16$

## تمارين وتطبيقات

**حدِّد مَيل كل مستقيم.**

16. $y=4x+10$
17. $3x+y=7$
18. $10=-5x+2y$
19. $4x-3y=12$
20. $y=\frac{1}{3}x-3$
21. $3x-y=7$

**22** $2x-y=14$ **23** $3x+2y=51$ **24** $13=20x-5y$

**25** $3y=-4x+2$ **26** $\frac{2}{3}x+6y=1$ **27** $4x+\frac{1}{4}y=8$

**حدِّد مَيل مستقيم متعامد مع المستقيم المعطى.**

**28** $y=-\frac{1}{3}x+10$ **29** $-\frac{1}{2}x-y=20$ **30** $13=-x+y$

**31** $3x+12y=12$ **32** $y=5x+10$ **33** $3x+y=2$

**34** $20=-5x+2y$ **35** $4x+4y=12$ **36** $2y=5x+11$

**37** $-4x+8y=17$ **38** $12x+3y=10$ **39** $4y=20x-3$

**اكتب، على الصورة العامة، معادلة للمستقيم المار بالنقطة (2، 3) والموازي للمستقيم المعطى.**

**40** $x+y=1$ **41** $3x=7y+2$ **42** $y=2x-3$

**43** $3y=2x$ **44** $7x-2y=10$ **45** $11=3y+2x$

**اكتب، على صورة المَيل-التقاطع، معادلة للمستقيم المحدَّد بحسب المعطيات.**

| | يمر بـ | موازٍ للمستقيم |
|---|---|---|
| 46 | $(3, -5)$ | $5x-2y=10$ |
| 47 | $(-2, 7)$ | $y=3x-4$ |
| 48 | $(2, 4)$ | $y=7$ |
| 49 | $(2, -4)$ | $y=3x-4$ |
| 50 | $(-1, 4)$ | $y=2x+5$ |

| | يمر بـ | متعامد مع المستقيم |
|---|---|---|
| 51 | $(3, -3)$ | $5x+2y=10$ |
| 52 | $(2, 7)$ | $y=3x-4$ |
| 53 | $(2, -4)$ | $y=7$ |
| 54 | $(-2, 4)$ | $3x+y=5$ |
| 55 | $(-1, 4)$ | $y=2x-5$ |

**ارسم المستقيم $y=5x$.**

**56** ارسم مستقيمًا موازيًا للمستقيم $y=5x$ واكتب معادلته.

**57** ارسم مستقيمًا متعامدًا مع المستقيم $y=5x$ واكتب معادلته.

**ماذا يمكنك أن تقول عن مَيل كلٍّ من المستقيمات التالية؟**

**58** موازٍ لمستقيم أفقي. **59** متعامد مع مستقيم أفقي.

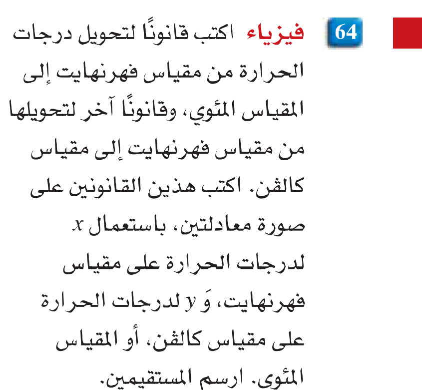
**60** موازٍ لمستقيم عمودي. **61** متعامد مع مستقيم عمودي.

**ربط** هندسة **اكتب معادلات لأربعة مستقيمات تتقاطع لتشكّل مربّعًا تكون أضلاعه:**

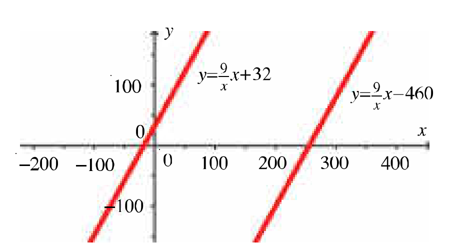
**62** موازية للمحورين الإحداثيين.

**63** **هندسة** يقع أحد أضلاع مربّع على المستقيم $y=\frac{3}{4}x+5$ . اكتب معادلات لمستقيمات يمكن أن تقع عليها الأضلاع الأخرى.

**تطبيـــقات**



**64** **فيزياء** اكتب قانونًا لتحويل درجات الحرارة من مقياس فهرنهايت إلى المقياس المئوي، وقانونًا آخر لتحويلها من مقياس فهرنهايت إلى مقياس كالفن. اكتب هذين القانونين على صورة معادلتين، باستعمال $x$ لدرجات الحرارة على مقياس فهرنهايت، وَ $y$ لدرجات الحرارة على مقياس كالفن، أو المقياس المئوي. ارسم المستقيمين.




المعادلة $y=\frac{9}{5}x+32$ تحوّل من المقياس المئوي إلى مقياس فهرنهايت.
والمعادلة $y=\frac{9}{5}x-460$ تحوّل من مقياس كالفن إلى مقياس فهرنهايت.

**تحــــــدٍّ**

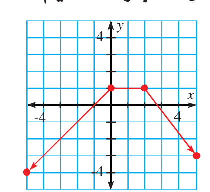
**65** ما العلاقة بين المستقيمين في التمرين 64؟ اكتب مَيل كل منهما.

**66** ما العلاقة بين المستقيمين في التمرين 64 والمستقيمين اللذين يمثِّلان التحويل من مقياسي كالفن والمئوي إلى مقياس فهرنهايت؟

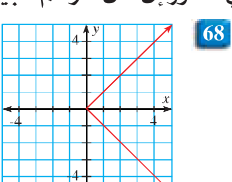
## نظرة إلى الوراء

**استعمل اختبار المستقيم العمودي لتقرّر إن كان الرسم البياني يمثّل دالّة.**

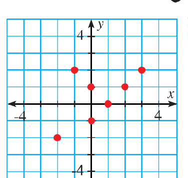
**67**

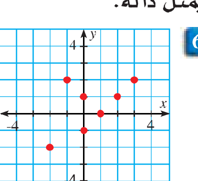


**68**



**69**





## نظرة إلى الأمام

**كم زوجًا مرتَّبًا تشكّل حلاً لنظام من معادلتين خطّيتين بمجهولين إذا كان المستقيمان اللذان يمثّلان المعادلتين:**

**70** متوازيين؟

**71** متعامدين؟

# الدوال التربيعيّة Quadratic Functions

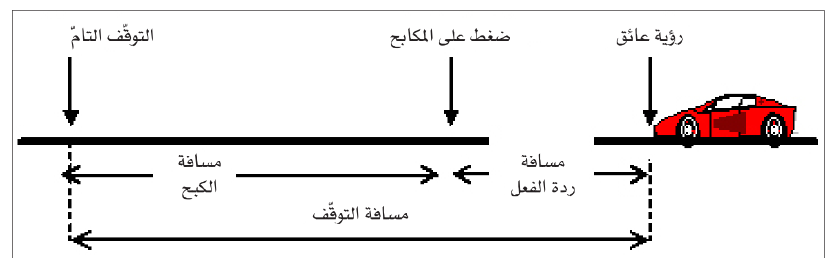
**الأهداف**

- يُميّز الدالّة التربيعية $f(x)=ax^2+bx+c$ ويمثّلها بيانيًّا.
- تمثيل الدالّة التربيعية بيانيًّا، ويستعمل اسم بيانها (القطع المكافئ)
- يميّز رأس القطع المكافئ ومحوره.
- يحدِّد بيانيًّا تزايد الدالّة وتناقصها.
- يحدِّد وجهة انفتاح القطع المكافئ وفقًا لإشارة المعامل $a$ .

**لماذا؟** يمكنك تمثيل الكثير من حالات الحياة اليومية بمقادير تربيعيّة. مثال ذلك: المسافة التي تقطعها سيارة يكبحها سائقها بدءًا من ملاحظة السائق لعائق أمامه وحتى التوقّف النهائي.

## المقادير التربيعيّة Quadratic Expressions

تتألّف المسافة التي تقطعها سيارة يكبحها سائقها، بدءًا من ملاحظة السائق لعائق أمامه وحتى التوقّف النهائي، من مسافتين كما يبيّن ذلك الرسم التالي:



يمكنك التعبير عن المسافة التي تحتاج إليها السيارة للتوقّف بواسطة المقدار الجبري: $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ ، حيث يمثّل المتغيّر $x$ سرعة السيارة عند رؤية العائق (بالكيلومترات في الساعة) وَ $d(x)$ مسافة التوقّف النهائي (بالأمتار).

يتكوّن المقدار $d(x)$ من مجموع المقدار $\frac{1}{5}x$ الذي يمثّل مسافة ردّة الفعل والمقدار $\frac{1}{160}x^2$ الذي يمثّل مسافة الكبح. إذا أنشأت جدول قيم للمقدار $d(x)$ باستعمال حاسبة بيانيّة فإنك تلاحظ أن المسافة اللازمة للتوقّف هي 25m تقريبًا عندما تكون السرعة 50km/h ، و 82m تقريبًا عندما تكون السرعة 100km/h .
وهكذا تلاحظ أن المسافة اللازمة للتوقّف تضاعفت أكثر من 3 أمثال في حين السرعة تضاعفت مرتين.

**تفكير ناقد** هل العلاقة بين السرعة $x$ ومسافة التوقف $d$ علاقة خطّيّة؟ أوضح ذلك.

### المقادير التربيعيّة Quadratic Expressions

**المقادير التربيعيّة** هي المقادير التي تُكتب على الشكل $ax^2+bx+c$ حيث $a$ وَ $b$ وَ $c$ أعداد حقيقيّة $a\neq 0$ . تُدعى الأعداد $a$ وَ $b$ وَ $c$ **معاملات** ***Coefficients*** المقدار التربيعي.

أبسط المقادير التربيعيّة هو المقدار $x^2$ . بصورة عامة، إذا ضربت مقدارًا خطّيًّا في مقدار خطّي آخر تحصل على مقدار تربيعي كما يبيّن ذلك النشاط التالي:

## النشاط 1

### المقادير التربيعيّة والمقادير الخطيّة Quadratic and Linear Expressions

1. أكمل الجدول التالي:

| المقدار الأول | المقدار الثاني | ناتج ضرب المقدارين |
|---|---|---|
| $2x-2$ | $2x+1$ | $(2x-2)(2x+1)=4x^2-2x-2$ |
| $x+1$ | $x+1$ | |
| $2x$ | $-2x+1$ | |
| $-x+2$ | $0.5x+1$ | |

2. حدِّد معاملات المقدار التربيعي في كل حالة من السؤال السابق.

## الدوال التربيعيّة Quadratic Functions

تعلّمت في الدرس الثاني من هذا الفصل الدوال الخطّية. سوف تتعلم في هذا الفصل نوعًا جديدًا من الدوال هو **الدوال التربيعية**. تذكّر أن الصورة العامة للدالّة الخطّية هي $f(x)=mx+b$ . إنها مُعرَّفة بمقدار جبري خطي بينما تُعرَّف الدالّة التربيعيّة بمقدار تربيعي.

### الدالّة التربيعيّة Quadratic Function

**الدالّة التربيعيّة** هي دالّة تُكتب قاعدتها بواسطة مقدار تربيعي في متغيّر واحد. أي إنها تُكتب على الصورة التالية: $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $a$ وَ $b$ وَ $c$ تمثّل أعدادًا حقيقيَّة وَ $a\neq 0$. تُدعى الأعداد $a$ وَ $b$ وَ $c$ **معاملات** الدالّة التربيعيّة.

أبسط الدوال التربيعيّة هي الدالّة $f(x)=x^2$ . ويمكنك توليد جميع الدوال التربيعيّة انطلاقًا من هذه الدالّة باستعمال تحويلات بسيطة أو مركّبة. فهي، لهذا السبب، تشكّل **الدالّة الأم** لجميع الدوال التربيعيّة. تشكّل الدالّة $d(x)=\frac{1}{5}x+\frac{1}{160}x^2$ مثالاً على دالّة تربيعيّة.

**تفكير ناقد** ما معاملات الدالّة التربيعيّة التي تمثّل مسافة توقُّف السيّارة؟

**1** **بيّن أن الدالّة** $f(x)=(2x-1)(3x+5)$ **دالّة تربيعيّة، وحدِّد معاملاتها** $a$ **وَ** $b$ **وَ** $c$.

**الحــل**

**طريقة أولى**

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=2x(3x+5)-(3x+5)$$
$$=6x^2+10x-3x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

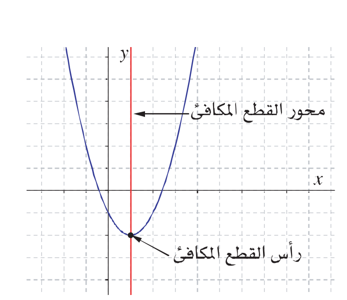
**طريقة ثانية**

$$f(x)=(2x-1)(3x+5)$$
$$=(2x-1)3x+(2x-1)5$$
$$=6x^2-3x+10x-5$$
$$=6x^2+7x-5$$

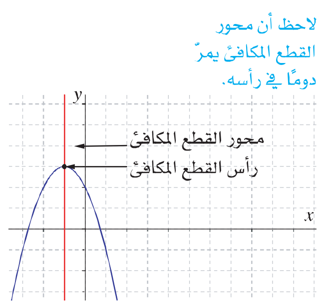
بما أن $f(x)=6x^2+7x-5$ فهي دالّة تربيعيّة ومعاملاتها هي $a=6$ ، $b=7$ ، $c=-5$ .

**حـــاولْ** بيِّن أن الدالّة $f(x)=(2x-5)(x-2)$ دالّة تربيعيّة وحدِّد معاملاتها.

يحمل بيان الدالّة التربيعيّة اسمًا خاصًّا هو **القطع المكافئ** ***Parabola***. يُبيِّن الشكل أدناه نوعين من القطوع المكافئة.




لاحظ أن محور القطع المكافئ يمرّ دومًا في رأسه.



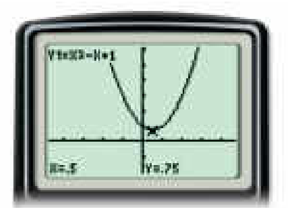

لاحظ أن لكل قطع مكافئ نقطة مميزة تُدعى **الرأس** ***Vertex*** وأن له محور تناظر يقسمه إلى قسمين متطابقين. لاحظ أيضًا أن رأس بيان الدالّة التربيعيّة يدلّ على قيمتها الكبرى أو قيمتها الصغرى. إذا أمعنت النظر في الدالّة تربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ يتبيّن لك أن حساب قيمة $f(x)$ ممكن أيًّا تكن قيمة $x$.. هذا يدلّ على أن مجال الدالّة التربيعيّة يساوي مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة. أما مداها فهو، كما يبيّن الرسمان البيانيان السابقان، إما مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي لا تقلّ عن القيمة الصغرى للدالّة (في النوع الأول)، وإما مجموعة الأعداد الحقيقيّة التي لا تزيد على القيمة الكبرى للدالّة (في النوع الثاني).

**مثـــــال 2** **هل يدلّ رأس الدالّة التربيعيّة $f(x)=x^2-x+1$ على قيمة صغرى أم على قيمة كبرى؟ يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة أو جدول قيم.**

**الحـل**

**طريقة أولى**

يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة لتكشف أن للدالّة قيمة صغرى.




إذا تتبّعت بيان الدالّة يبدو لك أن إحداثيي الرأس هما $(0.5, 0.75)$ .

**طريقة ثانية**

يمكنك استعمال الحاسبة البيانيّة لإنشاء جدول قيم للدالّة. يبيّن جدول القيم أن الدالّة تبلغ قيمتها الصغرى عندما يأخذ $x$ القيمة 0.5، وأن هذه القيمة الصغرى هي 0.75.

| X | Y1 |
|---|---|
| -2.00 | 7.00 |
| -1.50 | 4.75 |
| -1.00 | 3.00 |
| -.50 | 1.75 |
| 0.00 | 1.00 |
| .50 | .75 |
| 1.00 | 1.00 |

X=.5

يظهر من هذا الجدول أن رأس القطع المكافئ هو النقطة $(0.5, 0.75)$ .

**تكنولوجيا**

**الحاسبة البيانية**

**حـــاولْ** هل يدلّ رأس الدالّة التربيعيّة $f(x)=-2x^2-4x+1$ على قيمة صغرى أم على قيمة كبرى؟

يمكنك، بالنظر إلى إشارة المعامل $a$، أن تعرف إن كان للدالّة التربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ قيمة كبرى أو قيمة صغرى.

### قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟ Maximum and Minimum values

- بيان الدالّة التربيعيّة $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث تمثّل $a$ وَ $b$ وَ $c$ أعدادًا حقيقيّة وَ $a \neq 0$ ، هو **قطع مكافئ**.
- إذا كان $a$، معامل $x^2$ ، موجبًا، فإن القطع المكافئ ينفتح نحو الأعلى ويشكّل رأسه أدنى نقطة فيه. كما يشكّل الإحداثي الثاني لهذا الرأس **القيمة الصغرى Minimum** للدالّة.
- إذا كان $a$، معامل $x^2$ ، سالبًا، فإن القطع المكافئ ينفتح نحو الأسفل ويشكّل رأسه أعلى نقطة فيه. كما يشكّل الإحداثي الثاني لهذا الرأس **القيمة الكبرى Maximum** للدالّة.
- يشكّل الإحداثي الثاني لرأس القطع المكافئ **قيمة قصوى Extremum** للدالّة التربيعيّة. هذه القيمة القصوى هي إما قيمة كبرى وإما قيمة صغرى.

**مثـــــال 3** **هل القطع المكافئ مُنفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟ هل يدلّ رأسه على قيمة كبرى أم على قيمة صغرى؟**

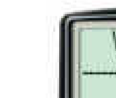
أ $f(x)=x^2+x-6$

ب $f(x)=5+4x-x^2$

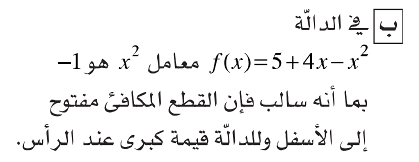
**الحــل**

**أ** في الدالّة $f(x)=x^2+x-6$ معامل $x^2$ هو 1. بما أنه موجب فإن القطع المكافئ مفتوح إلى الأعلى وللدالّة قيمة صغرى عند الرأس.

**تحقّق**



**ب** في الدالّة $f(x)=5+4x-x^2$ معامل $x^2$ هو $-1$ بما أنه سالب فإن القطع المكافئ مفتوح إلى الأسفل وللدالّة قيمة كبرى عند الرأس.



## النشاط 2

### تحويل الدالّة التربيعيّة الأم Transforming Quatratic Parent Function

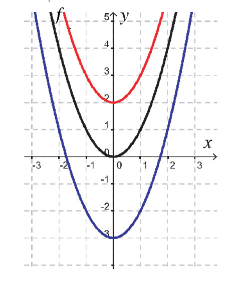
سوف تحتاج إلى ورق بيانيّ أو حاسبة بيانية.

1. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.
   $y=x^2$ $\quad y=x^2+1$ $\quad y=x^2-1$
2. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم إذا أضفت 1 إلى الدالّة أو أنقصته منها؟
3. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.
   $y=x^2$ $\quad y=(x+2)^2$ $\quad y=(x-2)^2$
4. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم إذا أضفت 2 إلى المتغيّر الحرّ أو أنقصته منه؟

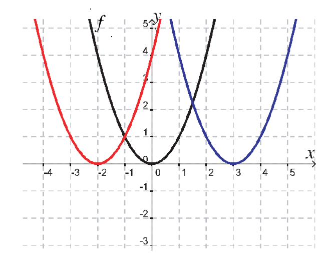
نقطة مراقبة √

5. أنشئ جدول قيم، ثم ارسم بيان كل دالّة.
   $y=x^2$ $\quad y=(x-2)^2+1$ $\quad y=(x-2)^2-1$ $\quad y=(x+2)^2+1$
6. كيف يتأثّر بيان الدالّة الأم نتيجة إخضاعه للتحويل الناتج عن إنقاص 2 من $x$ وإضافة 1 إلى الدالّة؟ عن إضافة 2 إلى $x$ وإنقاص 1 من الدالّة؟

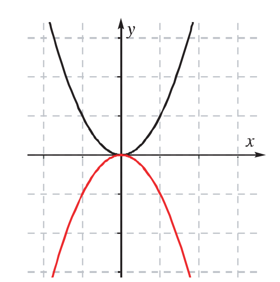
نقطة مراقبة √



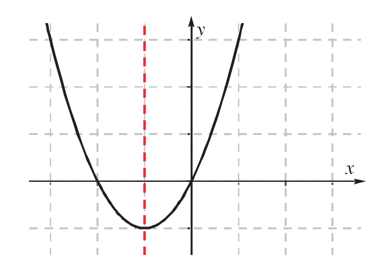
تمثّل كل من الدالّتين $y=x^2+2$ وَ $y=x^2-3$ **سحبًا عموديًّا Vertical Translation** لبيان الدالّة الأم $y=x^2$ .
من شأن إضافة عدد إلى الدالّة أو إنقاصه منها، أن يسحب بيانها عموديًّا إلى **أعلى** أو إلى **أسفل**.



تمثّل كل من الدالّتين $y=(x+2)^2$ وَ $y=(x-3)^2$ **سحبًا أفقيًّا Horizontal Translation** لبيان الدالّة الأم $y=x^2$ .
من شأن إضافة عدد إلى المتغيّر الحرّ أو إنقاصه منه أن يسحب بيانها أفقيًّا إلى **اليسار** أو **اليمين**.




يمثّل بيان الدالّة $y=-x^2$ عكسًا لبيان الدالّة التربيعيّة الأم حول المحور الأول. وبينما يدلّ رأس القطع المكافئ على قيمة صغرى للدالّة التربيعيّة الأم، يدلّ هذا الرأس على قيمة كبرى للدالّة $y=-x^2$.

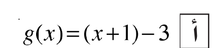



يشكّل المستقيم العمودي المارّ في رأس القطع المكافئ محور تناظر لهذا الخط البياني، لأن هذا المستقيم يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين. يُدعى هذا المستقيم **محور القطع المكافئ Axis of Symmetry**.

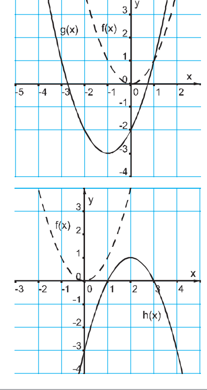
**مثـــــال** 4 **تحويل بيان الدالّة التربيعية**

**كيف تُحوّل بيان الدالّة التربيعية الأم (الأساسية) $f(x)=x^2$ للحصول على بيان الدالّة.**

أ $g(x)=(x+1)-3$



بواسطة سحب وحدة واحدة إلى اليسار و 3 وحدات إلى أسفل.




ب $h(x)=-(x-2)+1$

بواسطة سحب وحدتان إلى اليمين يتبعه انعكاس حول المحور $x$
ثم سحب إلى أعلى وحدة واحدة.

**حــــاولْ** كيف تُحوّل بيان الدالّة التربيعيّة الأم $f(x)=x^2$ للحصول على بيان الدالّة.

أ $g(x)=(x-2)+4$

ب $h(x)=(x+3)-2$

## التمـــــاريـــــن

### التواصل في الرياضيات

1. أوضح الفرق بين بيان الدالّة الخطيّة وبيان الدالّة التربيعيّة.
2. أوضح الفرق بين المقدار الجبري الذي يُعرّف دالّة خطيّة والمقدار الجبري الذي يُعرّف دالة تربيعيّة.
3. كيف تعرف أن رأس القطع المكافئ يدلّ على قيمة صغرى أو قيمة كبرى للدالّة التربيعيّة؟
4. ما العلاقة بين بيان الدالّة التربيعيّة الأم وبيان الدالّة $y=x^2-8$ ؟
5. ما العلاقة بين بيان الدالّة التربيعيّة الأم وبيان الدالّة $y=(x-8)^2$ ؟

## تمارين موجّهة

**بيّن أن الدالّة هي دالّة تربيعيّة وحدّد معاملاتها.**

6 $f(x)=(x+1)(x-7)$ 7 $f(x)=(x+2)(x+5)$ 8 $f(x)=(2x+5)(3x+1)$

**قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟** أجب عن السؤالين التاليين في التمارين من 9 إلى 14:

أ هل القطع المكافئ منفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟

ب هل القيمة القصوى للدالّة قيمة كبرى أم قيمة صغرى؟

9 $f(x)=x^2-3x+5$ 10 $f(x)=2-3x-x^2$ 11 $f(x)=x^2+5x+3$

12 $f(x)=x^2-2x+7$ 13 $f(x)=-x^2+8x+14$ 14 $f(x)=-2x^2-5x+1$

## تمارين وتطبيقات

**بيّن أن الدالّة هي دالّة تربيعيّة وحدّد معاملاتها.**

15 $f(x)=(x-3)(x+8)$ 16 $f(x)=(4-x)(7+x)$

17 $f(x)=-(x-2)(x-6)$ 18 $f(x)=(2x+3)(4-x)$

19 $f(x)=x(x-3)$ 20 $f(x)=(x-6)(x+6)$

**هل الدالّة دالة تربيعيّة أم لا؟ أوضح ذلك.**

21 $y=3-x^2$ 22 $y=3-x$

23 $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ 24 $y=\frac{2x^2+5}{x+3}$

25 $y=x^2-x^2(x+7)$ 26 $y=|x^2+5x-2|$

**هل القطع المكافئ منفتح إلى أعلى أم إلى أسفل؟ هل القيمة القصوى للدالّة قيمة صغرى أم قيمة كبرى؟**

27 $y=2x^2-2x$ 28 $y=-8x^2-x$

29 $y=3-x^2$ 30 $y=4-x^2-2x$

**كيف تُحوّل بيان الدالّة الأم للحصول على بيان كل دالّة.**

31 $y=(x-2)^2-1$ 32 $y=(x-5)^2-2$

33 $y=-(x-2)^2+1$ 34 $y=-(x+6)^2-2$

35 $y=-(x-3)^2-2$ 36 $y=(x+4)^2-7$

37 **تحويلات** ارسم بيان الدالّة ثم أجب عن الأسئلة المطروحة.

أ $y=(x+2)(x-4)$ ب $y=2(x+2)(x-4)$

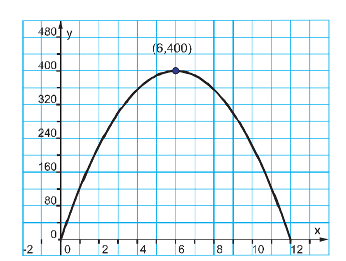
ج $y=\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$ د $y=-(x+2)(x-4)$

هـ $y=-2(x+2)(x-4)$ و $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)$

- بماذا تشترك هذه الخطوط البيانيّة الستّة؟
- أي منها منفتح إلى الأسفل؟
- أي منها منفتح إلى الأعلى؟

**تطبيقات**

**فيزياء** **يمثّل الخط البياني المقابل العلاقة بين الوقت محسوبًا بالثواني، وارتفاع قذيفة أطلقت نحو الأعلى، محسوبًا بالأمتار.**




**38** ما أعلى ارتفاع وصلت إليه القذيفة؟

**39** كم ثانية استغرقت القذيفة لتصل إلى الارتفاع الأعلى؟ ما محور هذا البيان؟

**40** **فيزياء** أطلق جوامير سهمًا نحو الأعلى بسرعة 40 مترًا في الثانية. حدِّد ارتفاع السهم بعد 5 ثوانٍ، باستعمال الدالّة $y = 40x - 5x^2$ ، حيث يمثّل $x$ الوقت بالثواني ويمثّل $y$ الارتفاع بالأمتار. قرّب جوابك إلى أقرب عشر.

## نظرة إلى الوراء

**يتضمّن المقدار $2(x-3)^2+1$ ضربًا وعملية داخل القوسين ورفعًا إلى قوّة بأس 2 وجمعًا.**

**41** أيّ من هذه العمليات عليك إجراؤها أوّلاً؟

**42** أي منها عليك إجراؤها ثانيًا؟

**43** أي منها عليك إجراؤها ثالثًا؟

**اكتب كل معادلة على صورة الميل – التقاطع، ثم ارسم بيان الدالّة.**

**44** $2x+5y=14$

**45** $x=-\frac{1}{2}y=4$

## نظرة إلى الأمام

**46** ارسم في المستوي الإحداثي نفسه، بيانات الدوال: $y=x^2-3x+5$ وَ $y=x^2+7x+6$ وَ $y=x^2-14x+49$ . ما عدد النقاط المشتركة المكنة للمحور الأول مع كل قطع مكافئ؟

# أنظِمَةُ المعادلات الخَطيَّة

## Systems Of Linear Equations

الدروس


1. حل الأنظمة الخطّية بالتعويض

2. حل الأنظمة الخطّية بالحذف

3. حل الأنظمة الخطّية بيانيًّا


**تقاويم للإنقاذ**

يُمكنك استعمال أنظمة المعادلات الخطّية لتخطيط عملية طبع وبيع تقاويم لجمع أموال، تُستعمل في الحفاظ على بعض أنواع الطيور المهدَّدة بالانقراض.

الدرس 1

# حل الأنظمة الخطيَّة بالتعويض

## Solving Linear Systems by Substitution

**لماذا؟** غالبًا ما تحتاج أن تحلَّ نظامًا من معادلتَيْن خطيَّتَيْن وتعطي الجواب المضبوط من دون تقريب. فالبائع في السوق يحتاج أن يحدِّد سعر كل سلعة بدقة بغية تحقيق الربح المرتجى.

**الأهداف**

- يحلّ نظامًا من معادلتين خطيَّتَيْن بطريقة التعويض.

**المفردات**
**Vocabulary**
طريقة التعويض
Substitution Method

تعرّفت في الصفوف السابقة أنظمة المعادلات الخطّية وقمت بحل بعضها. سوف تتعلَّم في هذا الصف عدَّة طرائق لحل مثل هذه الأنظمة. سوف تتعلَّم في البداية طريقة التعويض.

**تطبيقات**
سباق سيارات

## النشاط

### استكشاف طريقة التعويض Exploring Substitution

شكّل سباق السيّارات الذي يجري في مدينة سبرنغ في الولايات المتحدة الأمريكية أحد أهمّ سباقات السيّارات. يقود كل سيّارة في هذا السباق فريق مؤلَّف من سائقَيْن يُتِم كلّ منهما عددًا من الدورات. حقَّق فريق آزاد ونوزاد 157 دورة بسيارته، وقد أتم نوزاد 21 دورة أقلّ من آزاد. كم دورة أتمَّ كلّ منهما؟

1. ابدأ بكتابة معادلات بغية إيجاد نموذج رياضي لحلّ المسألة. اختر المجهول $x$ لتمثيل عدد الدورات التي أتمَّها آزاد، والمجهول $y$ لتمثيل عدد الدورات التي أتمَّها نوزاد. سوف تحصل على نظام من معادلتَيْن خطّيتين بالمجهولَيْن $x$ وَ $y$:
$$\begin{cases} x+y=157 \\ y=x-21 \end{cases}$$

2. استعمل طريقة **خمّن وتحقَّق** لتجد قيمتَي $x$ وَ $y$ اللتين تشكّلان حلاً لنظام المعادلتين. (حل المسائل)

3. انظر إلى المعادلة الثانية: $y=x-21$ . كيف يمكنك استعمال هذه المعلومة حول $y$ في المعادلة الأولى؟

4. $y=x-21$ ، عوّض إذن عن المجهول $y$ في المعادلة الأولى بقيمته $x-21$ ، ثم حُلَّ المعادلة التي حصلت عليها لتجد قيمة $x$.

5. عوّضْ عن المجهول $x$ في المعادلة الثانية بالقيمة التي وجدتها في السؤال السابق لحساب قيمة $y$.

6. قارن قيمتَي $x$ وَ $y$ اللتَيْن وجدتهما مع القيمتَيْن اللتَيْن وجدتهما بطريقة **خمّن وتحقَّق**. هل تتطابق هذه النتائج؟ أوضحْ ذلك. (نقطة مراقبة √)

إذا علمت قيمة أحد المجهولَيْن في نظام معادلتَيْن خطيّتَيْن، فإن بإمكانك أن تحلّ النظام بأن تعوِّض عن هذا المجهول بقيمته في إحدى المعادلتَيْن. هذه الطريقة لحل النظام تُدعى **طريقة التعويض** **Substitution method**.

## مثال 1

حُلَّ النظام $\begin{cases} 8x+2y=19 \\ x=3 \end{cases}$ **بطريقة التعويض.**

**الحل**

بما أن $x=3$ ، فيمكنك التعويض عن $x$ في المعادلة الأولى بهذه القيمة:

$$8(3)+2y=19$$

حُلَّ الآن المعادلة التي حصلت عليها لتجد قيمة المجهول $y$.

$$24+2y=19$$
$$2y=-5$$
$$x=-2.5$$

الزوج المُرتَّب $(3, -2.5)$ هو حلّ النظام.

تحقَّق من صحَّة ذلك بالتعويض عن $x$ وَ $y$ في المعادلة الأولى:

$$8(3)+2(-2.5)\stackrel{?}{=}19$$
$$24+(-5)\stackrel{?}{=}19$$
$$19=19 \quad \text{صواب}$$

**حاولْ** حُلَّ النظام $\begin{cases} 2y+3x=19 \\ y=5 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

## مثال 2

حُلَّ النظام $\begin{cases} 15x-5y=30 \\ y=2x+3 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

**الحل**

عوِّض عن $y$ بقيمته $2x+3$ في المعادلة الأولى ثم حلّ المعادلة الناتجة.

$$15x-5(2x+3)=30$$
$$15x-10x-15=30$$
$$5x-15=30$$
$$5x=45$$
$$x=9$$

عوِّض عن $x$ بالقيمة 9 في المعادلة الثانية ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$$y=2(9)+3$$
$$=18+3$$
$$=21$$

الحل هو الزوج المُرتَّب $(9, 21)$ .

تحقَّق من صحّة ذلك بالتعويض عن $x$ وَ $y$ في المعادلتَيْن الأساسيّتَيْن.

$$15(9)-5(21)\stackrel{?}{=}30 \qquad 21\stackrel{?}{=}2(9)+3$$
$$135-105\stackrel{?}{=}30 \qquad 21\stackrel{?}{=}18+3$$
$$30=30 \ \text{صواب} \qquad 21=21 \ \text{صواب}$$

**حاولْ** حُلَّ النظام بطريقة التعويض.

أ $\begin{cases} 2x+5y=14 \\ y=5 \end{cases}$

ب $\begin{cases} -3x+2y=31 \\ x=0.5y+6 \end{cases}$

## مثال 3

حُلَّ النظام $\begin{cases} 3x+y=4 \\ 5x-7y=11 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

**الحل**

بغية استعمال طريقة التعويض، حُلَّ المعادلة الأولى لحساب قيمة $y$ بدلالة $x$.

$3x+y=4$ — اختر المعادلة الأسهل للحل

$3x+y-3x=4-3x$

$y=4-3x$

عوّض عن $y$ في المعادلة الثانية بقيمته $4-3x$ ثم حل المعادلة الناتجة.

$5x-7y=11$

$5x-7(4-3x)=11$

$5x-28+21x=11$

$26x-28=11$

$26x=39$

$x=1.5$

عوّض عن $x$ بالقيمة $1.5$ في المعادلة الأولى ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$3(1.5)+y=4$

$4.5+y=4$

$y=-0.5$

الحل هو الزوج المرتّب $(1.5, -0.5)$ .

تحقّق من صحة ذلك بالتعويض عن $x$ وَ $y$ في المعادلتَيْن الأساسيّتَيْن.

**تفكير ناقد** لماذا قمت، في المثال 3، بحساب المجهول $y$ بدلالة $x$ مستعملاً المعادلة الأولى عوضًا عن حساب $x$ بدلالة $y$؟

**حاوِلْ** حُلَّ النظام $\begin{cases} 6x-2y=11 \\ x+3y=4 \end{cases}$ بطريقة التعويض.

## مثال 4

**تطبيقات**
**تجارة**

يبيع بيرود القُبَّعات في المباراة النهائية لكرة القدم. لديه 100 قُبَّعة من الموسم الماضي و300 قُبَّعة جديدة. يرغب بيرود في هذا الموسم أن يبيع جميع القُبَّعات التي لديه بقيمة 000 300 5 دينار. كم عليه أن يُحدِّد ثمن القُبَّعة الجديدة وثمن القُبَّعة القديمة ليحقّق هدفه، علمًا بأن ثمن القُبَّعة الجديدة يزيد 000 7 دينار على ثمن القُبَّعة القديمة؟

**الحل**

ابدأ باختيار المجهولَيْن. اختر المجهول $d$ رمزًا لثمن القُبَّعة القديمة والمجهول $n$ رمزًا لثمن القُبَّعة الجديدة.

اكتبْ نظام المعادلتَيْن الذي يشكِّل نموذجًا لحلّ المسألة: $\begin{cases} 300n+100d=5\ 300\ 000 \\ n=d+7000 \end{cases}$

عوِّض عن $n$ في المعادلة الأولى بقيمته $d+7000$ ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$300(d+7000)+100d=5\ 300\ 000$

$300d+2\ 100\ 000+100d=5\ 300\ 000$

$400d+2\ 100\ 000=5\ 300\ 000$

$400d=3\ 200\ 000$

$d=8000$

عوِّض عن $d$ بالقيمة $8\ 000$ في المعادلة الثانية، ثم حُلَّ المعادلة الناتجة.

$n=8000+7000$

$n=15\ 000$

الحل هو$(15000, 8000)$. على سعيد أن يبيع القُبَّعة الجديدة بسعر 000 15 دينار، والقديمة بسعر 000 8 دينار.

**حاوِلْ** كم عليه أن يحدِّد ثمن كل نوع من القبّعات، لو كان يرغب في الحصول على 000 200 6 دينار؟

# التمـــاريـــن

## التواصل في الرياضيات

**1** إذا علمت أن $y=42$ ، فكيف تستعمل التعويض لحلّ المعادلة $y=x+8$ ؟

**2** لديك المعادلتان $-4x+y=2$ وَ $2x+3y=34$ . اختر المجهول الأسهل والمعادلة الأسهل لتبدأ الحل بها، وبيِّن سبب اختيارك. حُلَّ.

**3** أوضحْ كيف تستعمل التعويض لحل النظام $\begin{cases} x-2y=8 \\ 2x+3y=23 \end{cases}$

## تمارين موجَّهة

**حُلَّ النظام بالتعويض، ثم تحقَّق من الحلّ.**

**4** $\begin{cases} 5x=3y+12 \\ x=5 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} 3x-2y=2 \\ y=2x+8 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 5x-y=1 \\ 3x+y=1 \end{cases}$

**7** $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 10x=4y+2 \end{cases}$

## تمارين وتطبيقات

**8** مجموع عددَيْن يساوي 27. أكبرهما يزيد 3 على الآخر. ما هما؟

**حُلَّ كل نظام.**

**9** $\begin{cases} 2x+8y=1 \\ x=2y \end{cases}$

**10** $\begin{cases} x=7 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

**11** $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-y=10 \end{cases}$

**12** $\begin{cases} y=5-x \\ 1=4x+3y \end{cases}$

**13** $\begin{cases} 2x+y=-92 \\ 2x+2y=-98 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ x+y=4 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} 6y=x+18 \\ 2y-x=6 \end{cases}$

**16** $\begin{cases} 5x+y=2 \\ 10x=4y+2 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} 2y+x=4 \\ y-x=-7 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} 4y-x=15 \\ y+x=6 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} y = x - 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 2x + 3y = 21 \\ -3x - 6y = -24 \end{cases}$

**21** $\begin{cases} 5x - 7y = 31 \\ -4x + 2y = -14 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 3x + y = 21 \\ 10x + 5y = 65 \end{cases}$

**23** $\begin{cases} -3y = 9x + 24 \\ 6y + 2x = 32 \end{cases}$

**24** $\begin{cases} 12x + 4y = 22 \\ 3x - 8y = -10 \end{cases}$

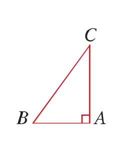
**25** $\begin{cases} 11x + 4y = -17 \\ -6x + y = 22 \end{cases}$

**26** $\begin{cases} -5x + 7y = -41 \\ 7x + y = 25 \end{cases}$

**ربــــط**

**27** **هندسة** احسب طول مستطيل وعرضه، علمًا بأن محيطه يساوي 210m، وطوله يساوي ضعف عرضه.

**28** **هندسة** مجموع قياسَي الزاويتَيْن $B$ وَ $C$ في المثلَّث المقابل 90 درجة. احسب قياس كل زاوية من زوايا المثلَّث علمًا بأن قياس الزاوية $B$ ينقص 30 درجة عن ضعف قياس الزاوية $C$.




**ربــــط**

**29** **نظرية الأعداد** العدد $x$ يقل 4 عن ثلاثة أضعاف العدد $y$. إذا أنقصتَ ضعفي $y$ من مجموع 3 مع ضعفي $x$ تحصل على 11. ما هذان العددان؟

**اكتب نظام معادلتَيْن خطِّيَّتَيْن لكلّ مسألة ثم حُلَّه.**

**30** **أعمال خيرية** أقامت جمعية العناية الخيرية حفلاً قدّمت خلاله المرطِّبات لعدد من الراشدين والأولاد بلغ 210 أشخاص، وجمعت 935 ألف دينار. كان ثمن المشروب للراشد 6 آلاف دينار وللولد 3.5 آلاف دينار.

أ اكتب معادلة تُبيِّن كيف جُمِّع المبلغ بكامله.

ب اكتب معادلة تُبيِّن العدد الإجمالي للأشخاص.

ج حُلَّ نظام المعادلتَيْن الذي حصلت عليه. كم كان عدد الراشدين؟ وكم كان عدد الأولاد؟

**31** **نافذة على الثقافة الصينية** تذكر مسألة صينية أن عددًا من الفلاحين تشاركوا في دفع ثمن أداة زراعية. إذا دفع كل منهم 8 قطع نقدية، زاد المبلغ المجمَّع 3 قطع عن المطلوب. وإذا دفع كل منهم 7 قطع نقدية، نقص المبلغ المجمَّع 4 قطع عن المطلوب. كم كان عدد الفلاحين وكم كان ثمن الأداة؟

## نظرة إلى الوراء

**32** تسلية في مسابقة للجري، تقدّم نسرين على شنو 20 مترًا، وتأخَّر شنو 5 أمتار عن زيان الذي تأخَّر 10 أمتار عن بهار. بينما تقدَّم شرين على بهار 15 مترًا. كيف كان ترتيب المتسابقين؟

**حُلَّ المعادلة.**

**33** $\frac{x}{15}=3$

**34** $\frac{3}{x}=15$

**35** $\frac{15}{x}=3$

**36** $\frac{x}{3}=15$

**37** 42% من عدد يساوي 12.6. ما هذا العدد؟

## نظرة إلى الأمام

**استعمل التعويض لحلّ كل نظام. (لاحظ 3 معادلات بثلاثة مجاهيل).**

**38** $\begin{cases} x+2y+3z=8 \\ y+3z=3 \\ z=2 \end{cases}$

**39** $\begin{cases} 2x+3y+5z=44 \\ 2y-6z=4 \\ z=4 \end{cases}$

الدرس

2

# حلّ الأنظمة الخطيّة بالحذف

## Solving Linear Systems by Elimination

**الأهداف**

- يحلّ نظامًا من معادلتَيْن خطّيَّتَيْن بطريقة الحذف.

**لماذا؟**

يشكّل الحذف طريقة جديدة توفّر حلاً سريعًا لأنظمة المعادلَتَيْن الخطّيَّتَيْن المعقّدة التي تصادفها في هذا الدرس.

**تطبيقات**

**تأجير سيارات**

**المفردات**

**Vocabulary**

طريقة الحذف

Elimination Method

يقوم مكتب هوار بتأجير السيّارات. يدفع السائح مبلغًا من المال عن كل يوم يستأجر فيه السيّارة، ومبلغًا آخر عن كلّ كيلومتر تقطعه السيارة. استأجر كل من الصديقين رزكار وزانا سيّارة من شركة هوار للقيام برحلة. دامت رحلة رزكار يومَيْن قطع خلالها 125km ، ودامت رحلة زانا 4 أيّام قطع خلالها 350km . دفع رزكار 287 250 دينار ، ودفع زانا 697 500 دينار. حدِّد أُجرة السيّارة في اليوم، وكلفة الكيلومتر.

يمكنك كتابة نظام معادلتَيْن خطّيّتَيْن ثم حُلَّه لتحديد كلٍّ من المبلغَيْن.

ابدأ بتعريف المجهولَيْن اللذَيْن يرمزان إلى المبلغَيْن.

المجهول $d$: يرمز إلى أُجرة السيارة في اليوم.

المجهول $k$: يرمز إلى كلفة الكيلومتر.

انطلاقًا من المعلومات أعلاه. يمكنك أن تكتب نظام المعادلتين

$$\begin{cases} 2d+125k=287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$$

يمكنك بالطبع، أن تحلّ هذا النظام بطريقة التعويض. إلا أن ذلك ليس بالأمر اليسير. سوف تتعلم في هذا الدرس طريقة جديدة لحلّ أنظمة معقّدة.

## النشاط

### استعمال المعكوسات Using Inverses

سوف تحلّ نظام المعادلتَيْن $\begin{cases}3x+2y=7\\5x-2y=9\end{cases}$

1. تتضمَّن المعادلتان حدَّين متعاكسَيْن. ما هما؟
2. استعمل خاصية الجمع للمساواة لتحصُلَ على معادلة انطلاقًا من المعادلتَيْن (اجمع $3x+2y$ مع $5x-2y$ وَ 7 مع 9). كم مجهولاً تتضمّن المعادلة الجديدة؟
3. حُلَّ المعادلة الجديدة لتحديد قيمة المجهول، ثم عوِّض عن هذا المجهول بقيمته في واحدة من المعادلتَيْن الأساسيَّتَيْن. حُلَّ المعادلة الناتجة من ذلك لتحديد قيمة المجهول الثاني .
4. تحقَّق من أن القيمتَيْن اللتَيْن حصلت عليهما للمجهولَيْن $x$ وَ $y$ تشكّلان حلاًّ لنظام المعادلتَيْن.
5. أوضحْ كيف تستعمل المعكوسات لحلّ نظام معادلات.

نقطة مراقبة √

## طريقة الحذف Elimination Method

استعملت في النشاط السابق **طريقة الحذف Elimination Method** لحل نظام المعادلتَيْن.
تستعمل هذه الطريقة المعكوسات لحذف أحد المجهولَيْن.

**1 استعمل طريقة الحذف لحل النظام** $\begin{cases}3x+4y=7\\2x-4y=13\end{cases}$

**الحــل**

استعملْ خاصّية الجمع في المساواة لتحصل على معادلة تتضمَّن $x$ فقط انطلاقًا من المعادلتَيْن. حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\2x-4y&=13\\\hline 5x+0&=20\\5x&=20\\x&=4\end{aligned}$$

لاحظ أن $4y$ وَ $-4y$ متعاكسان

لتحديد قيمة $y$، عوِّض عن $x$ بقيمته 4 في المعادلة الأولى.

$$\begin{aligned}3x+4y&=7\\3(4)+4y&=7\\12+4y&=7\\4y&=-5\\y&=-1.25\end{aligned}$$

حلّ النظام هو $(4, -1.25)$ .

عوِّض عن $x$ بقيمته 4، وعن $y$ بقيمته $-1.25$ في كلّ من المعادلتَيْن الأساسيَّتَيْن للتحقُّق من الحل.

$$3(4)+4(-1.25)\stackrel{?}{=}7$$
$$12+(-5)\stackrel{?}{=}7$$
$$7=7$$ صواب

$$2(4)-4(-1.25)=13$$
$$8-(-5)=13$$
$$13=13$$ صواب

لاحظ أن مُعاملي المجهول $y$ في المعادلتَيْن متعاكسان، الأمر الذي يجعل حلّ هذا النوع من أنظمة المعادلات سهلاً.

**حــاولْ** حُلَّ النظام بطريقة الحذف.

أ $\begin{cases}3y-x=5\\4y+x=9\end{cases}$

ب $\begin{cases}3y+2x=21\\5y-2x=14\end{cases}$

يتطلّب الأمر أحياناً أن تضرب طرفي إحدى المعادلتين أو كلتيهما بعدد للحصول على متعاكسَين يسمحان بحذف أحد المجهولَين. يسهِّل هذا الأمر كون معامل أحد المجهولين في إحدى المعادلتَين يساوي 1. لكن يمكنك تطبيق هذه التقنية على أنظمة أكثر تعقيداً مثل نظام المثال 2.

## مثال 2

**استعمل طريقة الحذف لحل النظام** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x+7y=3 \end{cases}$

**الحل**

اضرب طرفي المعادلة الأولى في 5 وطرفي المعادلة الثانية في $-2$ بغية الحصول على متعاكسَين.

$$\begin{cases} (5)2x+(5)3y=(5)1 \\ (-2)5x+(-2)7y=(-2)3 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \end{cases}$$

استعمل الآن خاصّية الجمع للمساواة لتحصل على معادلة جديدة فيها مجهول واحد هو $y$، ثم حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{array}{r} 10x+15y=5 \\ -10x-14y=-6 \\ \hline y=-1 \end{array}$$

عوّض الآن عن $y$ بقيمته في المعادلة الأولى.

$$2x+3y=1$$
$$2x+3(-1)=1$$
$$2x-3=1$$
$$2x=4$$
$$x=2$$

الحل هو $(2, -1)$ .

تحقّق من الحل بالتعويض عن كلّ من المجهولَين بقيمته في كل من المعادلتَين.

$$2(2)+3(-1)\stackrel{?}{=}1 \qquad 5(2)+7(-1)\stackrel{?}{=}3$$
$$4+(-3)\stackrel{?}{=}1 \qquad 10+(-7)\stackrel{?}{=}3$$
$$1=1 \text{ صواب} \qquad 3=3 \text{ صواب}$$

**حاولْ** استعمل طريقة الحذف لحلّ النظام $\begin{cases} 5x-3y=2 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$

## مثال 3

**استعمل طريقة الحذف لحل المسألة التي طُرحت في أوّل الدرس** $\begin{cases} 2d+125k=287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$

**الحل**

اضرب طرفي المعادلة الأولى في $-2$. $\begin{cases} (-2)2d+(-2)125k=(-2)287\ 250 \\ 4d+350k=679\ 500 \end{cases}$

استعمل الآن خاصية الجمع للمساواة بغية الحصول على معادلة جديدة فيها مجهول واحد هو $k$، ثم حُلَّ هذه المعادلة.

$$\begin{array}{r} -4d+(-250k)=-574\ 500 \\ 4d+\ \ 350k=\ \ 679\ 500 \\ \hline 100k=105\ 000 \\ k=1050 \end{array}$$

عوِّض عن $k$ بقيمته في المعادلة الأولى لتحديد قيمة $d$.

$$2d+125(1050)=287\ 250$$
$$2d+131\ 250=287\ 250$$
$$2d=156\ 000$$
$$d=78\ 000$$

حل نظام المعادلات السابق هو$(78\ 000; 1050)$. يمكنك التحقُّق من صحَّته بالتعويض. أُجرة السيّارة في اليوم 78 ألف دينار، وكلفة الكيلومتر 1050 ديناراً.

**حاولْ** حُلَّ كل نظام بطريقة الحذف.

أ) $\begin{cases} 2x-y=7 \\ 5x+4y=11 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} 3x-2y=6 \\ 5x+7y=41 \end{cases}$

# التمـــــــاريـــــــن

## التواصل في الرياضيات

دُلَّ على الحدَّيْن المتعاكسَيْن في كل نظام واشرح كيف تحلُّه.

**1** $\begin{cases} x+7y=13 \\ x-7y=5 \end{cases}$

**2** $\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 5x+3y=20 \end{cases}$

**3** $\begin{cases} 2a+b=6 \\ -2a-3b=8 \end{cases}$

**تطبيـــقات** اشرح الخطوات الواجب اتّباعها لحلّ كل نظام بطريقة الحذف.

**4** $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x+6y=7 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} 2x-5y=1 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 9a+2b=2 \\ 21a+6b=4 \end{cases}$

## تمارين موجَّهة

حُلَّ النظام بالحذف ثم تحقّق من الحل.

**7** $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 5x-2y=7 \end{cases}$

**8** $\begin{cases} 4x+3y=13 \\ 2x-4y=1 \end{cases}$

**9** $\begin{cases} 2x-2y=4 \\ 3x+5y=-10 \end{cases}$

**10** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x-4y=0 \end{cases}$

## تمارين وتطبيقات

حُلَّ النظام بالحذف وتحقّق من صحة الحل.

**11** $\begin{cases} -x+2y=12 \\ x+6y=20 \end{cases}$

**12** $\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 5a-b=11 \end{cases}$

**13** $\begin{cases} -4x+3y=-1 \\ 8x+6y=10 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 5x-3y=11 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} 2x=2-9y \\ 21y=4-6x \end{cases}$

**16** $\begin{cases} -x-7=3y \\ 6y=2x-14 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} \frac{2}{3}x=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}y \\ y=3x-12 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} 0.6x=3.2y+4.6 \\ 2.9y=0.3x+4.8 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} b=1.5k+4 \\ 0.8b+0.4k=0 \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 2x=3y-12 \\ \frac{1}{3}x=4y+5 \end{cases}$

**21** $\begin{cases} 2x-7y=20 \\ 5x+8y=-1 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 2x-5y=-14 \\ -7x+4y=-5 \end{cases}$

**23** $\begin{cases} 3x-2y=-26 \\ 5x+3y=9 \end{cases}$

**24** $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y=-\frac{17}{15} \\ \frac{8}{5}x-\frac{7}{6}y=-\frac{3}{10} \end{cases}$

**ربـــــط** **25** هندسة مستطيل محيطه 24m. طوله يساوي 3 أضعاف عرضه. ما طول المستطيل وما عرضه؟

**اكتب نظام معادلتَيْن لكل مسألة. اختر الطريقة الفضلى لحلّ النظام. حُلَّ النظام وتحقَّق من صحَّة الحل.**

**تطبيـــقات**

**26** **رياضيات المستهلك** قرَّر أستاذ الرياضيات الاحتفال مع تلاميذه بذكرى ولادة عالم الرياضيات الخوارزمي. اشترى 3 فطائر بيتزا و3 علب عصير كبيرة لتلاميذ الشعبة الأولى ودفع 54 ألف دينار. واشترى 4 فطائر بيتزا وَ6 علب عصير كبيرة لتلاميذ الشعبة الثانية ودفع 78 ألف دينار . ما ثمن فطيرة البيتزا وما ثمن علبة العصير؟

**27** **مدخول** يعمل بارام حارسًا في أحد مواقف السيّارات. يتقاضى أجرًا ثابتًا مقابل 15 ساعة عمل في الأسبوع وأجرًا إضافيًّا عن كل ساعة عمل إضافية. عمل عبدالحق 25 ساعة في الأسبوع الأول وتقاضى 720 ألف دينار، وعمل 22.5 ساعة في الأسبوع الثاني وتقاضى 641.25 ألف دينار. ما أجره الثابت وما أجر الساعة الإضافية؟

**28** **تجارة** يبيع متجر الألحان أشرطة موسيقية من نوعين: أشرطة المنوّعات وأشرطة الموسيقى الكلاسيكية. يبلغ ثمن شريط المنوعات 21 ألف دينار، وثمن شريط الموسيقى الكلاسيكية 33 الف دينار. باع المتجر في أحد الأيام 25 شريطًا من النوعين، وكانت غلّته 693 ألف دينار. كم شريط منوّعات وكم شريط موسيقى كلاسيكية باع المتجر؟

**29** **استئجار المنازل** يدفع مستأجر المنزل تأمينًا مع أجرة الشهر الأول. دفع جوامير 000 700 2 دينار في الشهر الأول وَ 000 850 20 دينار على مدار السنة. ما قيمة التأمين وما قيمة أجرة المنزل في الشهر؟

**30** **سياحة** قدّم فندق البحر الأحمر عرضَيْن في عطلة نهاية الأسبوع. يتضمَّن العرض الأول ليلتَيْن وَ4 وجبات طعام بقيمة 615 ألف دينار ويتضمَّن العرض الثاني 3 ليالٍ وَ8 وجبات طعام بقيمة 1027.5 ألف دينار. ما كلفة الليلة الواحدة؟ وما كلفة وجبة الطعام؟

## نظرة إلى الوراء

**31** **نافذة على الثقافة الفرعونية** وجد علماء الآثار المسألة التالية على أوراق فرعونية: ثمن كيس يحتوي الأوزان نفسها من الذهب والفضة والرصاص 84 شعتة (وحدة نقد فرعونية). ما وزن كل من الذهب والفضة والرصاص في هذا الكيس إذا كان ثمن الدبن (وحدة وزن فرعونية) من الذهب 12 شعتة، وثمن الدبن من الفضة 6 شعتات، وثمن الدبن من الرصاص 5 شعتات؟

**حُلَّ المعادلة.**

**32** $-5=-x+7$     **33** $3x-2=2x+1$     **34** $\frac{1}{2}x+3=2$

## نظرة إلى الأمام

**35** **تكنولوجيا** ارسم المستقيمَيْن $2x-3y=6$ وَ $4x-6y=18$ في المستوى الإحداثي نفسه. صف ما حصلت عليه. استعمل حاسبة بيانية إذا أمكن.

# حل أنظمة المعادلات الخطّية بيانيًّا

## Solving Linear Systems Graphically

**الأهداف**

- يحلّ بيانيًّا نظامًا من معادلتين خطّيتين.
- يصنِّف نظامًا من معادلتين خطّيتين.

**لماذا؟**

غالبًا ما تُستعمل أنظمة المعادلات الخطّية لحلّ مسائل من الواقع، وبخاصة في الإدارة والاقتصاد. في بعض الحالات، لا يكون إيجاد الحل المضبوط مهمًّا، بل المطلوب إيجاد حلّ تقريبي. وفي بعض الأحيان يكون مطلوبًا النظر إن كان الحل موجودًا، وحيدًا أو متعددًا. في هذه الحالات، يساعدنا الحل البياني لنظام المعادلات الخطية على الإجابة عن السؤال المطروح.

## حلّ أنظمة المعادلات الخطّية بيانيًّا Solving Linear Systems Graphically

**المفردات Vocabulary**

نظام محدَّد Independent System

نظام غير محدَّد Dependent System

نظام مستحيل metsyS tnetsisuocnI

تعلَّمت في الفصل السابق كيف تحلّ أنظمة المعادلات الخطّية باستعمال التعويض أو الحذف. غير أن كلاًّ من هاتين الطريقتين تتطلّب تحديد قيمة أحد المجهولين ثم تحديد قيمة الآخر. من ناحية ثانية، قد يتطلّب حلّ مسألة من الحياة اليومية إيجاد قيَم تقريبية للحلّ فقط، وقد يتطلّب الإجابة عن سؤال بسيط مثل: هل هناك حلول لنظام المعادلات؟ وما عددها في حالة وجودها؟ سوف تتعلّم في هذا الدرس طريقة لحلّ هذه الأنظمة تؤمّن الإجابة السريعة عن مثل هذه الأسئلة.

### النشاط 1

### حل نظام معادلات خطّية بيانيًّا Solving Linear Systems Graphically

تلزمك حاسبة بيانية أو ورقة بيانية.

سوف تحلّ بيانيًّا النظام $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$

1. ماذا تقول عن النقطة $(c, d)$ بالنسبة إلى المستقيمين $y=3x+1$ وَ $y=-x+5$ عندما يكون الزوج المرتَّب $(c, d)$ حلاًّ لهذا النظام؟
2. ارسم كلاًّ من المستقيمين في المستوى الإحداثي نفسه.
3. أعطِ قيَمًا تقريبيّة لإحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين.
4. أعطِ حلاًّ تقريبيًّا للنظام.

نقطة مراقبة √

$)=a$

## مثـــــال 1

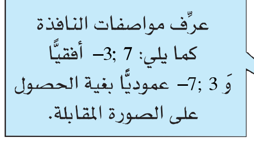
حُلَّ بيانيًا النظام $\begin{cases} 3x+y=4 \\ x-2y=6 \end{cases}$

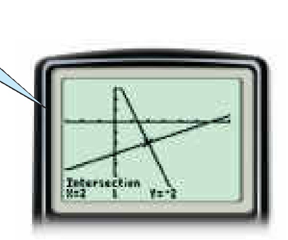
**الحــل**

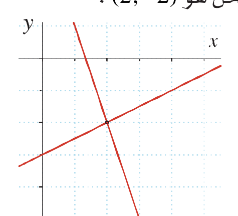
بغية رسم المستقيم $3x+y=4$ ، حدِّد نقطة تقاطعه مع المحور الثاني عن طريق إعطاء المجهول $x$ قيمة الصفر وإيجاد قيمة المجهول $y$ التي تقابلها. تحصل على $y=4$ . يمر المستقيم إذًا في النقطة $(0,4)$ . حدِّد أيضًا نقطة تقاطع المستقيم مع المحور الأول عن طريق إعطاء المجهول $y$ قيمة الصفر وإيجاد قيمة $x$ التي تقابلها. تحصل على $x=\frac{4}{3}$ . يمرّ المستقيم إذًا في النقطة $\left(\frac{4}{3},0\right)$ . الآن، ارسم المستقيم.

استعمل الطريقة السابقة لرسم المستقيم $x-2y=6$ . يتقاطع المستقيمان عند النقطة $(2,-2)$ .

الحل هو $(2,-2)$ .




تحقَّق من الحل بالتعويض عن $x$ بالعدد 2 وعن $y$ بالعدد $-2$ .

$$3x+y\overset{?}{=}4 \qquad x-2y\overset{?}{=}6$$

$$3\times2+(-2)\overset{?}{=}4 \qquad 2-2(-2)\overset{?}{=}6$$

$$6-2\overset{?}{=}4 \ \text{صواب} \qquad 2+4\overset{?}{=}6 \ \text{صواب}$$

## النشاط 2

### تصنيف أنظمة المعادلات الخطّية — Classifying Linear Systems

تلزمك حاسبة بيانية أو ورقة بيانية.

1. مثِّل بيانيًّا النظام الأول في الجدول المقابل.
   أ ) هل يتقاطع المستقيمان؟
   ب) هل للنظام حلّ وحيد؟ ما هذا الحل إذا كان موجودًا؟
   إذا لم يكن للنظام حلّ، فعدِّل النظام لتحصل على نظام آخر له حل وحيد واحسب الحل.
2. كرّر ما قمت به مستعملاً النظام الثاني ثم الثالث.
3. اشرح العلاقة بين المستقيمين: **تفكير ناقد**
   - عندما لا يكون للنظام حل؛
   - عندما يكون للنظام عدد غير محدّدٍ من الحلول؛
   - عندما يكون للنظام حل وحيد.

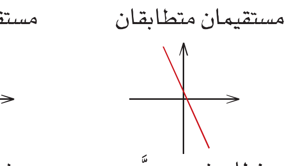
| |
|---|
| $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x+1 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} y=\frac{8-3x}{4} \\ y=-\frac{3}{4}x+2 \end{cases}$ |

عندما تحاول أن تحل بيانيًّا نظامًا من معادلتين خطّيتين، تكون في إحدى الحالات الثلاث التالية:

مستقيمان متقاطعان — نظام محدَّد

مستقيمان متطابقان — نظام غير محدَّد

مستقيمان متوازيان — نظام مستحيل



GRADE11-CHAP3-adabi(2)-13 2/12/15 12:50 PM Page 16

## تصنيف أنظمة المعادلات الخطّية Classifying Linear Systems

تُصنَّف أنظمة المعادلات في ثلاثة أنواع أساسية:

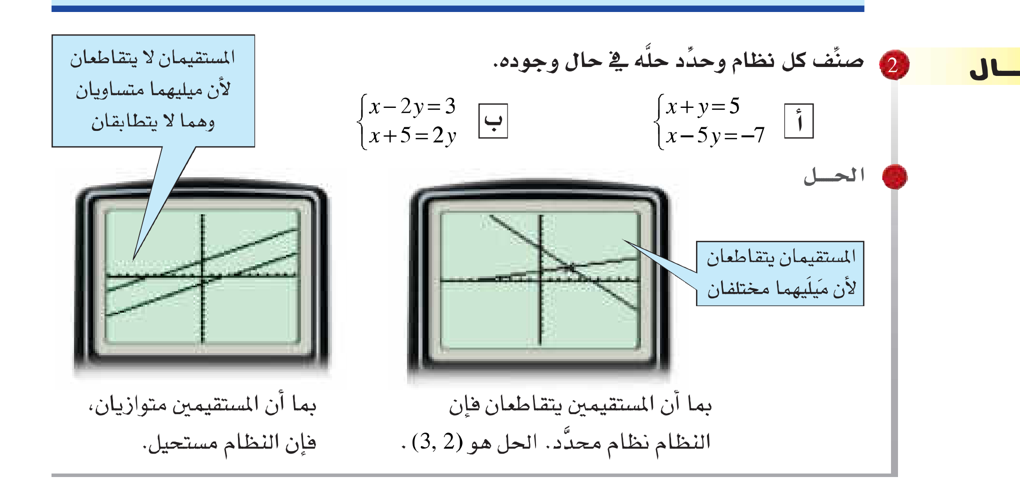
- **النظام المستحيل Inconsistent**: هو نظام لا حلّ له.
- **النظام المحدَّد Independent**: هو نظام له حلّ وحيد.
- **النظام غير المحدَّد Dependent**: هو نظام له عدد غير محدَّد من الحلول.

### مثال 2

**صنِّف كل نظام وحدِّد حلَّه في حال وجوده.**

أ $\begin{cases} x+y=5 \\ x-5y=-7 \end{cases}$ ب $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+5=2y \end{cases}$

**الحل**




بما أن المستقيمين يتقاطعان فإن النظام نظام محدَّد. الحل هو (3, 2) .

بما أن المستقيمين متوازيان، فإن النظام مستحيل.

**حاول** صنِّف النظام $\begin{cases} y=3x+4 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ وحدِّد حلَّه في حال وجوده.

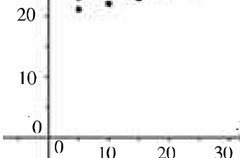
### مثال 3

أظهرت الإحصاءات حول سن الزواج للذكور والإناث في أحد البلدان، المعطيات المبيَّنة في الصورة المقابلة. أنشئ جدولاً يلخِّص هذه المعطيات. إذا استمر الأمر على هذا المنوال، فهل سيأتي وقت يتساوى فيه سن الزواج عند الذكور وسن الزواج عند الإناث؟

**الحل**

للإجابة عن السؤال، مثِّل المعطيات الخاصة بالجنسين في المستوي الإحداثيّ نفسه.

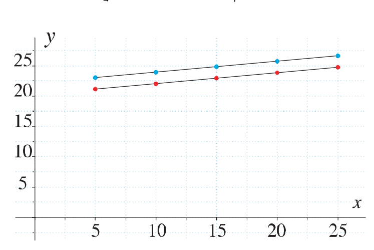
| السنة بعد 1970 | سن الزواج للرجال | سن الزواج للنساء |
|---|---|---|
| 5 | 23.02 | 21.14 |
| 10 | 23.92 | 22.04 |
| 15 | 24.82 | 22.94 |
| 20 | 25.72 | 23.84 |
| 25 | 26.62 | 24.74 |



لاحظ أن النقاط العائدة إلى كل من الجنسين تقع على مستقيم واحد. مَيل المستقيم العائد إلى الذكور هو $m_1 = \frac{24.82-23.02}{15-5} = 0.18$ . كما أن ميل المستقيم العائد إلى الإناث هو $m_2 = \frac{22.94-21.14}{15-5} = 0.18$ .

لكي تكتب معادلة المستقيم العائد إلى الذكور، اكتب $y = 0.18x + b$ . حدِّد $b$ باستعمال النقطة $(10, 23.92)$ تحصل على $23.92 = 0.18(10) + b$ ، وبالتالي $b = 23.92 - 1.8 = 22.12$ .
معادلة المستقيم العائد إلى الذكور هي، إذًا، $y = 0.18x + 22.12$ . تستطيع إيجاد معادلة المستقيم العائد إلى الإناث بالطريقة نفسها فتحصل على $y = 0.18x + 20.24$ .
تتساوى سن الزواج عند الذكور مع سن الزواج عند الإناث إذا كان لنظام المعادلات التالي حلول:

$$\begin{cases} y = 0.18x + 22.12 \\ y = 0.18x + 20.24 \end{cases}$$




لكي تجد الجواب، حُلَّ النظام بيانيًّا. يعطينا تمثيل المعادلتين بيانيًّا مستقيمين متوازيين. ينتج من ذلك أن النظام مستحيل، وأنه إذا استمرّت الأمور على المنوال نفسه، فلا أمل أن تتساوى سن الزواج عند الجنسين.

**حـــاول** حُلّ النظام $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 18x - 2y = 4 \end{cases}$ بيانيًّا ثم تحقَّق من الحل.

# التمـــــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** أوضح كيف تحلّ بيانيًّا النظام $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -9 \end{cases}$ .

**2** كيف تمثّل بيانيًّا النظام $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$ ؟ أوضح كيف تقدِّر الحل بالنظر إلى الرسم البياني. لماذا عليك أن تتحقّق من صحة تقديرك؟

**3** أوضح كيف تجد قاعدة دالّة خطّية بمعرفة بيانها.

## تمارين موجّهة

**حُلّ كل نظام بيانيًّا.**

**4** $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ y = -x + 4 \end{cases}$

**5** $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 2y = -x - 9 \end{cases}$

**6** $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 4x - 4y = 4 \end{cases}$

**مثّل كل نظام بيانيًّا وقدّر الحل. قرّب تقديراتك إلى أقرب عُشر.**

**7** $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 2 \\ y = -\frac{2}{3}x \end{cases}$

**8** $\begin{cases} 2y - x = 6 \\ 3x + y = -5 \end{cases}$

**9** مع لانه 4 آلاف دينار مكوَّنة من قطع نقدية من فئتَي 250 دينارًا و500 دينار. ما عدد القطع من كل فئة، إذا كان عدد القطع كلها 13 قطعة؟

## تمارين وتطبيقات

**صنِّف كلّ نظام.**

**10** $\begin{cases} x-y=-4 \\ 3x+y=8 \end{cases}$

**11** $\begin{cases} 3x+4y=12 \\ 4y-12=-3x \end{cases}$

**مثِّل بيانيًّا كلّ نظام وصنِّفه. حدِّد الحلّ بيانيًّا عندما يكون النظام محدَّدًا.**

**12** $\begin{cases} 6x+4y=12 \\ 2y=6-3x \end{cases}$

**13** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -3x+4y=-10 \end{cases}$

**14** $\begin{cases} y=2x-1 \\ 6x-y=13 \end{cases}$

**15** $\begin{cases} x+3y=13 \\ 2x-3y=-9 \end{cases}$

**16** $\begin{cases} y=-2x-7 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

**17** $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$

**18** $\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y=4 \\ x+2y=8 \end{cases}$

**19** $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ \frac{1}{2}x=y+\frac{3}{2} \end{cases}$

**20** $\begin{cases} 4x+5y=-7 \\ 3x-6y=24 \end{cases}$

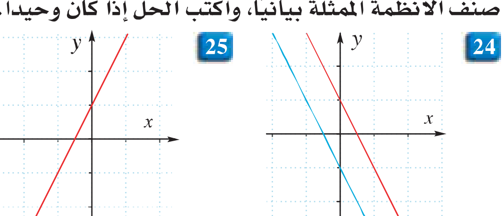
**21** $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-4y=-6 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 3x-y=2 \\ -3x+y=1 \end{cases}$

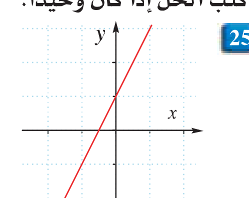
**23** $\begin{cases} 6x-3y=9 \\ 3x+7y=47 \end{cases}$

**صنِّف الأنظمة المُمثَّلة بيانيًّا، واكتب الحلّ إذا كان وحيدًا.**

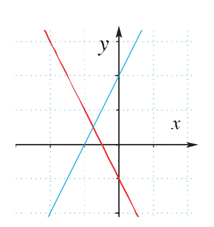
**24**



**25**



**26**



**27** هل يشكِّل الزوج المرتَّب حلاًّ للنظام؟

أ $(1, 3)$؛ $\begin{cases} 5x+2y=11 \\ x-y=11 \end{cases}$

ب $(5, -2)$؛ $\begin{cases} 4x-3y=26 \\ 2x+y=8 \end{cases}$

ج $(2, 1)$؛ $\begin{cases} 2x-y=8 \\ x+3y=5 \end{cases}$

د $(5, 2)$؛ $\begin{cases} 4x-2y=16 \\ -8x+4y=-32 \end{cases}$

هـ أحد الأنظمة الأربعة السابقة غير محدَّد. جده، ثم اكتب ثلاثة أزواج مرتَّبة إضافية يشكِّل كلّ منها حلاًّ له.

**هندسة** **حديقة مستطيلة الشكل محيطها 130m. ثلاثة أضعاف طولها يساوي عشرة أضعاف عرضها.**

**28** احسب طول الحديقة وعرضها.

**29** احسب مساحتها.

**30** **طيران** باشرت طائرة، تحلّق على ارتفاع 7000m، الهبوط بمعدّل 450m في الدقيقة. وباشرت طائرة أخرى تحلّق على ارتفاع 375m، الصعود بمعدّل 575m في الدقيقة. اكتب نظامًا من معادلتين خطّيتين يسمح بحساب عدد الدقائق التي ستمرّ قبل أن تصبح الطائرتان على الارتفاع نفسه. حُلّ هذا النظام بيانيًّا.

## نظرة إلى الوراء

**31** يعمل آزاد في محل لبيع الأدوات الكهربائية. عرض عليه مديره أن يختار بين طريقتَيْن لتحديد أجره:

- 200 000 دينار + 5 % من مجموع مبيعاته.
- 7 % من مجموع مبيعاته.

اكتب دالّة لحساب الأجر في كل حالة، وارسم بيانها.
أي مستوى مبيعات يؤدي إلى الأجر نفسه؟

## نظرة إلى الأمام

**32** حُلَّ بيانيًّا النظام أدناه المكوّن من معادلة خطّية وأخرى غير خطّية.

$$\begin{cases} y = x^2 + 3 \\ y = 4x \end{cases}$$

# أنظِمَةُ المُتبايناتِ الخَطيَّة

## Systems of Linear Inequalities

**الدروس**

1. المتباينات الخطّية بمجهول واحد
2. المتباينات الخطّية بمجهولين
3. أنظمة المتباينات الخطّية

**تقدّم نحو الأفضل**

أنشطة اقتصادية كثيرة يعتمد التخطيط لعملياتها على حل أنظمة متباينات خطّية.

# المُتبايِنات الخطيّة بمجهول واحد
## Inequalities

**الأهداف**
- يكتب مُتباينة خطّية في مجهول واحد، ويحلُّها جبريًّا وبيانيًّا.
- يحل مُتبايِنات خطّية مركَّبة بمجهول واحد، جبريًّا وبيانيًّا.
- يحل مسائل باستعمال المُتبايِنات.

**المفردات**
**Vocabulary**

المُتباينة Inequality
مجموعة الحل Solution set
المُتبايِنة المركَّبة Compound Inequality

**لماذا؟** نستطيع حل الكثير من مسائل الحياة اليومية باستعمال المتباينات. مثال على ذلك، نسبة الدهون التي يجب ألاّ يتجاوزها الإنسان في طعامه لئلاّ يصاب بالصداع.

أظهرت إحدى الدراسات أن الأشخاص الذين يخفِّفون كمّية الدهون في طعامهم لِتقلَّ عن 20% من قيمة السعرات الحرارية التي يتناولونها، يصبحون أقلَّ عرضة لصداع الرأس. إذا رمز $c$ إلى عدد السعرات الحرارية في طعام الفرد، فيجب ألاّ يزيد عدد السعرات الدهنية $F$ على 20% من $c$. نُعبِّر عن ذلك بالجملة الرياضية $F \le 0.2c$ .

مثل هذه الجملة تُدعى **مُتبايِنة Inequality**. بصورة عامة، كل جملة رياضية تتضمَّن أحد رموز التباين $(\le;\ \ge;\ <;\ >)$ هي مُتبايِنة.

بغية حل المُتبايِنات، استعمل خواص التبايُن بين الأعداد الحقيقية.

**خواص التبايُن Properties of inequality**

| | |
|---|---|
| **خاصّية الجمع Addition Property** | إذا كان $a \le b$ ، فإن $a+c \le b+c$ |
| **خاصّية الطرح Subtraction Property** | إذا كان $a \le b$ ، فإن $a-c \le b-c$ |
| **خاصّية الضرب Multiplication Property** | إذا كان $a \le b$ ، فإن $ac \le bc$ إذا كان $c>0$<br>$ac \ge bc$ إذا كان $c<0$ |
| **خاصّية القسمة Division Property** | إذا كان $a \le b$ ، فإن $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$ إذا كان $c>0$<br>$\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$ إذا كان $c<0$ |

تبقى الخواص السابقة صحيحة باستخدام رموز التباين الأخرى.

**مجموعة الحل Solution Set** للمُتبايِنة هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المُتبايِنة صحيحة بالتعويض.

فالعددان الحقيقيان $\frac{1}{2}$ وَ $-1$ هما، مثلاً، حلاّن للمتباينة $6x+1<13$ ، لأن التعويض عن المجهول $x$ بأحد هذين العددين يعطيك مُتباينتَيْن عدديتَيْن صحيحتَيْن:

$$6x+1<13 \qquad 6x+1<13$$
$$6\left(\frac{1}{2}\right)+1\overset{?}{<}13 \qquad 6(-1)+1\overset{?}{<}13$$
$$3+1\overset{?}{<}13 \qquad -6+1\overset{?}{<}13$$
$$4\overset{?}{<}13 \text{ صواب} \qquad -5\overset{?}{<}13 \text{ صواب}$$

**حـاولْ** هل تستطيع أن تجد حلولاً أخرى للمُتباينة السابقة؟ تحقَّق باستعمال التعويض.

**مثـــال 1** حُلّ المتباينة $4x-5\geq 13$ .

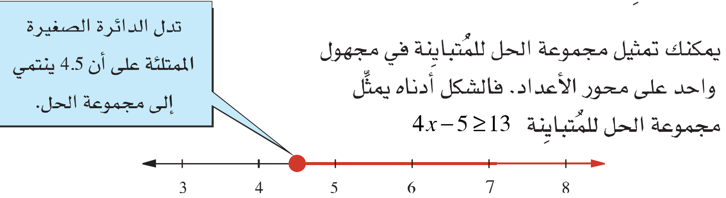
**الحـل**

| | |
|---|---|
| $4x-5\geq 13$ | المتباينة |
| $4x-5+5\geq 13+5$ | استعمل خاصّية الجمع |
| $4x\geq 18$ | بسّط |
| $x\geq \frac{18}{4}=4.5$ | استعمل خاصّية القسمة |

مجموعة الحل للمُتباينة السابقة هي، إذًا، مجموعة الأعداد الحقيقية التي لا تقلّ عن 4.5.

**حـاولْ** حُلّ المُتباينة $-4<7-3x$ .

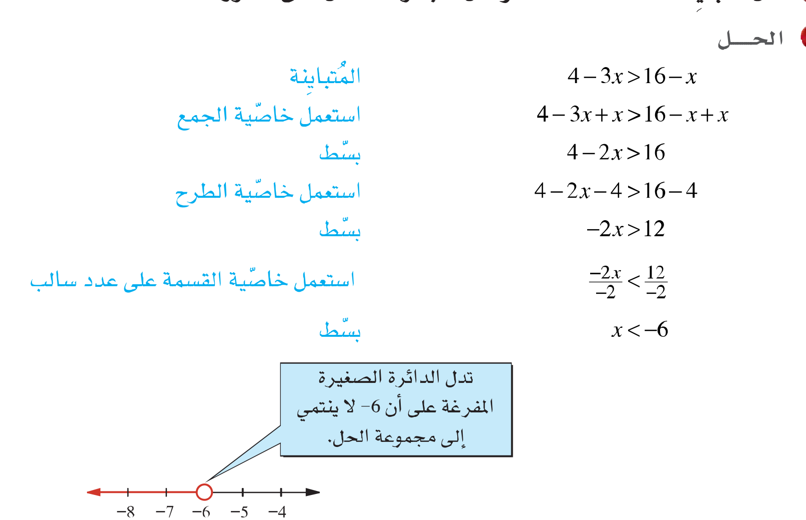
يمكنك تمثيل مجموعة الحل للمُتباينة في مجهول واحد على محور الأعداد. فالشكل أدناه يمثِّل مجموعة الحل للمُتباينة $4x-5\geq 13$




**مثـــال 2** حُلّ المُتباينة $4-3x>16-x$ ، ومثّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**الحـل**

| | |
|---|---|
| $4-3x>16-x$ | المُتباينة |
| $4-3x+x>16-x+x$ | استعمل خاصّية الجمع |
| $4-2x>16$ | بسّط |
| $4-2x-4>16-4$ | استعمل خاصّية الطرح |
| $-2x>12$ | بسّط |
| $\frac{-2x}{-2}<\frac{12}{-2}$ | استعمل خاصّية القسمة على عدد سالب |
| $x<-6$ | بسّط |




**حـاولْ** حُلّ المُتباينة $5-7b>8-4b$ .

## مثال 3

تطبيقات امتحانات

تتحدّد درجة التلميذ النهائية في ثانوية الرازي من درجة الاختبار بنسبة الثلثين ودرجة الواجب المنزلي بنسبة الثلث. كانت درجة صباح في اختبار التاريخ 90 على 100. **ما الحد الأدنى لدرجة الواجب المنزلي التي يجب أن تنالها صباح لكي لا تقلّ درجتها النهائية عن 93 على 100؟**

**الحل**

تسمح لك معطيات المسألة أن تكتب:

$$\frac{1}{3}\left(\text{درجة الواجب المنزلي}\right) + \frac{2}{3}\left(\text{درجة الاختبار}\right) = \text{الدرجة النهائية}$$

أو $f = \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ حيث يرمز $f$ إلى الدرجة النهائية، ويرمز $h$ إلى درجة الواجب المنزلي.
لكي لا تقلّ $f$ عن 93 يجب أن تشكّل $h$ حلاً للمُتباينة:
$93 \leq \frac{2}{3}(90) + \frac{1}{3}h$ .

حُلّ هذه المتباينة:

| | |
|---|---|
| $93 \leq \frac{1}{3}h + 60$ | بسّط |
| $93 - 60 \leq \frac{1}{3}h + 60 - 60$ | استعمل خاصّية الطرح |
| $33 \leq \frac{1}{3}h$ | بسّط |
| $3 \times 33 \leq 3 \times \frac{1}{3}h$ | استعمل خاصّية الضرب |
| $99 \leq h$ | بسّط |

إذًا، يجب ألاّ تقل درجة الواجب المنزلي عن 99، لكي لا تقلّ الدرجة النهائية عن 93.

## النشاط

### استكشاف حل المُتباينات بيانيًا Exploring Inequalities Grayphically

1. حُلَّ المُتباينة $2x - 3 < 3$ .
2. ارسم، في المستوى الإحداثي نفسه، المستقيمين $y = 2x - 3$ وَ $y = 3$ .
3. حدِّد قيَم المتغيِّر $x$ التي تجعل النقطة العائدة لها على المستقيم $y = 3$ أعلى من تلك التي على المستقيم $y = 2x - 3$ .
4. اشرح كيف تساعدك الإجابة عن السؤال السابق على حل المُتباينة.
5. حُلَّ المُتباينة $3x + 2 > 5$ بيانيًّا. اشرح الخطوات التي تقودك إلى الحل.

**نقطة مراقبة √**

**تفكير ناقد**

هل تصلح الطريقة السابقة لحل المُتباينة $2x - 3 > x + 4$ ؟ والمُتباينة $3x + 1 \geq 4$ ؟ أوضح ذلك.

## المتباينات المركّبة Compound Inequalities

قرأ دانا نتائج فحص الدم الذي أجراه لمعرفة كمّية السكّر في دمه، ووجد عليها إشارة تقول إن هذه الكمية $s$ يجب ألاّ تقلّ عن 750 ملّيجرامًا في اللتر، وألاّ تزيد على 1100 ملّيجرام في اللتر.
إذًا، يجب أن تحقّق $s$ الشرطين $s \geq 750$ وَ $s \leq 1100$ ، أي أن تكون حلاً مشتركًا للمُتباينتين $x \geq 750$ وَ $x \leq 1100$ .

عندما ترتبط مُتباينتان بواسطة الرابط «وَ» $\wedge$ نحصل على **مُتباينة مُركَّبة Compound Inequality**. لكي تحلّ مُتباينة مُركَّبة بواسطة الرابط $\wedge$ ، ابدأ بحلّ كلّ من المُتباينتَيْن على حدة، وخذ الحلول المشتركة. أي إنَّ مجموعة الحل لمُتباينة مركَّبة بواسطة الرابط $\wedge$ هي تقاطع مجموعتي الحل للمُتباينتين، كلٌّ على حدة.

**مثال 4** **حُلّ $(2x+1\geq 3)\wedge(3x-4\leq 17)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

**الحل**

$$2x+1\geq 3 \quad \wedge \quad 3x-4\leq 17$$
$$2x\geq 2 \quad \wedge \quad 3x\leq 21$$
$$x\geq 1 \quad \wedge \quad x\leq 7$$

مجموعة الحل لهذه المتباينة المُركَّبة هي مجموعة قيَم $x$ التي تحقِّق $1\leq x\leq 7$

وهي تمثَّل على محور الأعداد كما يلي:

بصورة عامة، يمكنك التعبير عن $(x>a)\wedge(x<b)$ على الشكل التالي: $a<x<b$ .

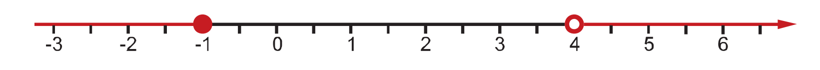
**حـاولْ** حُلّ $(-2x+5\geq 3)\wedge(x-5>-12)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

هناك نوع آخر من المُتبايِنات المركَّبة، هي تلك التي تنتج عن ربط مُتباينتين باستعمال الرابط «أو» $\vee$ . مجموعة الحل لمُتباينة مركَّبة بواسطة الرابط $\vee$ هي اتحاد مجموعتَيِ الحل للمُتباينتَيْن، كلٌّ على حدة.

**مثال 5** **حُلّ $(3x+2\leq -1)\vee(5x+1>21)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

**الحل**

$$5x+1>21 \quad \vee \quad 3x+2\leq -1$$
$$5x>20 \quad \vee \quad 3x\leq -3$$
$$x>4 \quad \vee \quad x\leq -1$$




**حـاولْ** حلّ $(7x+1>36)\vee(2x\leq 5)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

## التمـاريـن

### التواصل في الرياضيات

**1** أوضح الخطوات التي تقوم بها لتمثيل مجموعة الحل للمُتباينة $7x-7>0$ على محور الأعداد.

**2** بم تختلف مجموعة حل $7x-7>0$ عن مجموعة حل $7x-7\geq 0$ ؟
بم تختلف مجموعة حل $7x-7>0$ عن مجموعة حل $7x-7<0$ ؟

**3** هل للمتباينتين $x<16$ وَ $-x<-16$ مجموعة الحل نفسها؟ وضِّح ذلك.

**4** كيف تكتب الجملة «$x$ عدد غير سالب» باستعمال رموز التبايُن؟

## تمارين موجَّهة

**5** حُلّ المُتباينة $3x+1<13$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**6** حُلّ المُتباينة $a+4<4a-11$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**تطبيقات**

**7** **امتحانات** تتحدَّد درجة التلميذ النهائية في ثانوية المأمون من درجة الاختبار بنسبة $\frac{3}{4}$ وَ درجة السعي اليومي بنسبة $\frac{1}{4}$. كانت درجة دنيا في السعي اليومي 92 على 100. ما الحد الأدنى للدرجة التي على دنيا أن تنالها في الاختبار لكي لا تقلّ درجتها النهائية عن 80 على 100؟

**8** حُلّ المُتباينة المُركَّبة $(3x-7\geq -13)\wedge(2x+3<15)$ ، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

**9** حُلّ المُتباينة المُركَّبة $(2x+4\leq -10)\vee(4x-6<14)$ ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.

## تمارين وتطبيقات

**اكتب مُتباينة تناسب مجموعة الحلّ المثلّة على محور الأعداد.**

**10** **11**

**12** **13**

**حُلّ المُتباينة، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

| | |
|---|---|
| **14** $5x<10$ | **15** $-5x>10$ |
| **16** $-5x<-10$ | **17** $a+4<10$ |
| **18** $\frac{1}{2}a-1\geq -15$ | **19** $\frac{1}{5}b-2\leq 28$ |
| **20** $-x+8<41$ | **21** $-5x-15\leq 60$ |
| **22** $\frac{y}{2}\leq 10$ | **23** $-\frac{y}{32}<2$ |
| **24** $-6(b+4)<12$ | **25** $6-(4a-3)\geq 8$ |
| **26** $4y-12>7y-15$ | **27** $3(4y-5)<8y+3$ |
| **28** $-4x-3<-6x-17$ | **29** $-5(3x+2)\geq 4(x-1)$ |

**حُلّ المُتباينة المُركَّبة، ومثِّل مجموعة الحل على محور الأعداد.**

| | |
|---|---|
| **30** $(x>-4)\wedge(x<2)$ | **31** $(x>-4)\wedge(x>2)$ |
| **32** $(x>-4)\vee(x>2)$ | **33** $(x>-4)\vee(x<2)$ |

**34** $(x<-4)\wedge(x>2)$ **35** $(x<-4)\wedge(x<2)$

**36** $(x<-4)\vee(x<2)$ **37** $(x<-4)\vee(x>2)$

**تطبيقات**

**38** **أعمال خيرية** قرّرت إحدى المؤسسات الخيرية إجراء سحب خيري على سيارة تبرَّعت بها إحدى الشركات. تتوقَّع هذه المؤسسة بيع 250 1 تذكرة على الأقل، وتأمل الحصول على 000 000 21 دينار.
كم يكون السعر الأدنى للبطاقة، علمًا بأن نفقات الدعاية تبلغ 000 1500 دينار؟

**39** كلفة الإنتاج لسلعة معيَّنة هي $C=40x+868$ ، ومردود البيع هو $R=54x$ ، حيث يرمز $x$ إلى عدد الوحدات المنتجة، ويرمز $C$ إلى كلفة إنتاج هذه الوحدات.

أ اكتب مُتباينة تعبِّر عن تحقيق أرباح.

ب كم وحدة على الأقل يجب على المؤسسة أن تبيع لئلاّ تقع تحت خسارة؟

ج حُلّ المُتباينة السابقة بيانيًّا.

## نظرة إلى الوراء

**حُلَّ المعادلة الحرفية وذلك بحساب المجهول بين القوسين بدلالة المجاهيل الأخرى.**

**40** $A=p+prt$ $(t)$

**41** $SA=2ab+2ac+2bc$ $(a)$

## نظرة إلى الأمام

**42** جِدْ زوجين مرتّبين $(x, y)$ يكونان حلاًّ للمُتباينة: $2x+3y<10$ .

# المُتباينات الخطّية بمجهولين

## Linear inqualities in two unknowns

**لماذا؟** يستعمل مديرو مراكز التسلية المتباينات الخطّية لتحديد عدد بطاقات الدخول من مختلف الأسعار التي عليهم بيعها لكي يُحققوا أرباحًا (المثال 3).

**الأهداف**

- حل متباينة خطّية بمجهولين بيانيًّا.
- حل مسائل باستعمال المتباينات الخطّية بمجهولين.

**المفردات**

المتباينة الخطّية
Linear inequality

خط الحدود
Boundary line

تُشكِّل الدوال الخطّية أساس المتباينات الخطّية بمجهولين. تُعبِّر **المتباينة الخطّية بمجهولين** **Linear inequality in two unknowns** عن علاقة بين متغيّرين تتضمّن رمزًا من رموز التباين مثل المتباينة $y>2x-4$ . تتألف مجموعة الحل لمتباينة خطّية بمجهولين من جميع الأزواج المرتبة $(x,y)$ التي تُحقق المتباينة. كما أن النقاط التي تُمثِّل مختلف حلول المتباينة تُشكِّل جزءًا من المستوي الإحداثي مُحدَّدًا بخط يقسم المستوي إلى جزءين.

فالمستقيم $y=2x-4$ ، على سبيل المثال، يقسم المستوي الإحداثي إلى قسمين كما هو ظاهر في الشكل المقابل. يُحقق إحداثيًّا كل نقطة في أحد القسمين المتباينة $y>2x-4$، بينما يُحقِّق إحداثيًّا كل نقطة في القسم الآخر المتباينة $y<2x-4$ . يُمثِّل القسم الأول بيانيًّا مجموعة الحل للمتباينة $y>2x-4$ . إنّه **منطقة الحل** لهذه المتباينة. يُشكِّل المستقيم $y=2x-4$ خط الحدود لمنطقة الحل. ارسم خط الحدود مُنقّطًا للتعبير عن أن نقاطه لا تنتمي إلى منطقة الحل.

y > 2x - 4
y < 2x - 4
خط الحدود
y = 2x - 4

لحل المتباينة $y>2x-4$ ، ارسم خط الحدود مُنقّطًا وظلِّل المنطقة الواقعة فوقه.

## مثال 1

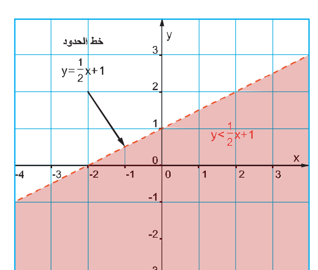
حُلّ بيانيًّا كل متباينة.

**الحل**

(أ) $y<\frac{1}{2}x+1$

خط الحدود هو المستقيم $y=\frac{1}{2}x+1$ الذي ميله $\frac{1}{2}$ وتقاطعه العمودي 1.

ارسم خط الحدود مُنقّطًا، لأنه لا يُشكّل جزءًا من منطقة الحل. ظلِّل المنطقة الواقعة تحت خط الحدود.




**تحقّق** اختر نقطة تقع في منطقة الحل، النقطة $(0,0)$ مثلاً، واختبر إن كانت تُمثِّل حلاً للمتباينة.

$y<\frac{1}{2}x+1$

$0\overset{?}{<}\frac{1}{2}0+1$

$0<1$ ✓

بما أن نقطة الاختبار تُحقق المتباينة، فإن المنطقة المظللة هي منطقة الحل.

$y \geq 2$ .

تذكّر أن المستقيم $y = 2$ مستقيم أفقي.

**الخطوة 1** ارسم المستقيم باستعمال خط متصل لأن خط الحدود يُشكّل جزءاً من منطقة الحل.

**الخطوة 2** ظلِّل المنطقة الواقعة فوق خط الحدود لتبيان النقاط حيث $y > 2$.

**تحقَّق** تنتمي النقطة $(0,4)$ إلى منطقة الحل لأن $4 \geq 2$.

لاحظ أن أي نقطة تقع على خط الحدود أو فوقه تُمثّل حلاً للمتباينة، بغضّ النظر عن قيمة $x$ .

**حـــاولْ** حُلّ بيانيًّا كل متباينة. $y \geq 3x-2$ وَ $y < -3$ .

إذا لم تكن معادلة خط الحدود مكتوبة على صورة الميل – التقاطع، يُمكنك اختيار نقطة اختبار لا تقع على خط الحدود لتحديد أي منطقة يجب تظليلها. إذا حقّق إحداثيًّا النقطة المتباينة، ظلِّل المنطقة التي تقع فيها النقطة، وإلا فظلِّل المنطقة الأخرى.

## مثـــــــال 2

**حُلّ المتباينة $2x+3y \geq 6$ باستعمال التقاطع مع كل من محورَي الإحداثيات.**

**الحـــل**

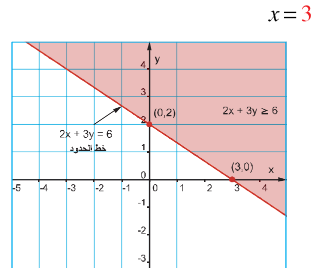
**الخطوة 1** حدِّد التقاطعَين.

عوّض عن $x$ بالصفر، ثم عوّض عن $y$ بالصفر لإيجاد تقاطع خط الحدود مع كل من محورَي الإحداثيات.

| التقاطع مع المحور الثاني (الرأسي) | التقاطع مع المحور الأول (الأفقي) |
| --- | --- |
| $2x+3y=6$ | $2x+3y=6$ |
| $2\times0+3y=6$ | $2x+3\times0=6$ |
| $3y=6$ | $2x=6$ |
| $y=2$ | $x=3$ |

**الخطوة 2** ارسم خط الحدود.

خط الحدود هو المستقيم الذي يمر في النقطتين $(0,2)$ وَ $(3,0)$. ارسم هذا المستقيم بخط متصل، لأنه جزء من منطقة الحل.




**الخطوة 3** حدِّد المنطقة الواجب تظليلها.

اختبر إن كانت النقطة $(0,0)$ تنتمي إلى منطقة الحل. بما أن التباين $0+0 \geq 6$ خطأ، فإنّ النقطة لا تنتمي إلى منطقة الحل. عليك، إذاً تظليل المنطقة الواقعة فوق خط الحدود.

**حـــاولْ** حُلّ بيانيًّا المتباينة $3x-4y>12$ باستعمال التقاطعين الأفقي والرأسي.

**مثـــــال**

## 3 تطبيق تجاري

**يبيع سيرك الشرق نوعين من بطاقات الدخول: بطاقة الكبار بسعر 8000 دينار وبطاقة الصغار بسعر 5000 دينار. ينفق مدير السيرك 000 240 دينار في كل حفلة. كم بطاقة دخول على المدير أن يبيع من كل نوع لتحقيق أرباح؟ باع المدير 20 بطاقة للصغار، كم عليه أن يبيع من بطاقات الكبار لكي يُحقّق ربحًا؟**

### 1 افهمِ المسألة

يتألّف حل هذه المسألة من شقين: كتابة المتباينة التي تُشكِّل حلولها إجابات عن السؤال الأول، وحل هذه المتباينة بيانيًّا، ثم تحديد عدد بطاقات الكبار الواجب بيعها، وقد بيع 20 بطاقة من بطاقات الصغار.

**اكتب المعطيات المهمة:**

- هناك نوعان من البطاقات: بطاقة الكبار بسعر 8000 دينار وبطاقة الصغار بسعر 5000 دينار.
- يجب ألاّ يقل ثمن البطاقات المبيعة عن 000 240 دينار.

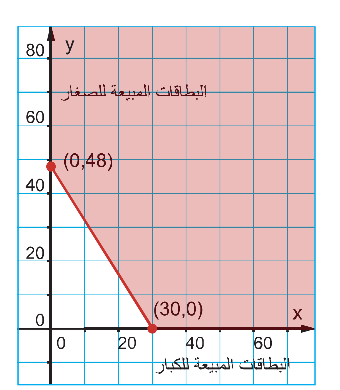
### 2 خطِّطْ

استعمل $x$ للدلالة على عدد بطاقات الكبار وَ $y$ للدلالة على عدد بطاقات الصغار. اكتب متباينة لتمثيل المسألة.

| المجموع | | عدد بطاقات الصغار | | سعر بطاقة الصغير | | عدد بطاقات الكبار | | سعر بطاقة الكبير |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 240 000 | ≥ | y | × | 5000 | + | x | × | 8000 |

يُمكن تمثيل المسألة بالمتباينة $8000x+5000y \geq 240\ 000$، أو $8x+5y \geq 240$.

### 3 حُلَّ




حدّد تقاطعَي خط الحدود مع كل مع المحورَين.

$8\times 0+5y=240$ $\quad$ $8x+5\times 0=240$

$y=48$ $\quad$ $x=30$

ارسم خط الحدود وهو المستقيم المار في النقطتين $(0,48)$ وَ $(30,0)$. ظلِّل المنطقة التي تتألّف من جميع النقاط التي تقع في الربع الأول وفوق خط الحدود، لأنّ عدد البطاقات غير سالب.

إذا كان عدد بطاقات الصغار المبيعة 20،

$8x+5\times 20 \geq 240$ عوِّض .

$8x+100 \geq 240$ بسِّط.

$8x \geq 140$ وبالتالي $x \geq 17{,}5$ يجب أن يكون عدد البطاقات عدداً صحيحاً.

يجب ألاّ يقل عدد بطاقات الكبار المبيعة عن 18.

### 4 تحقّقْ

$18\times 8000+20\times 5000=244000$

**حـــاول** قرّر مدير المركز الثقافي تقديم نوعين من الهدايا لأعضائه. ثمن الهدية من النوع الأول 125 000 دينار، وثمنها من النوع الثاني 40 000 دينار . بين يديّ المدير 1 500 000 دينار، كم هدية من كل نوع يُمكنه أن يُقدِّم؟ قدّم 4 هدايا من النوع الأول، كم سيقدّمُ من النوّعِ الثاني؟

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1. قارن بين الدائرتين المُفرغة والمملوءة في حل المتباينات الخطّية بمجهول واحد بيانيًّا وبين خطَّي الحدود المنقَّط والمتَّصل في حل المتباينات الخطّية بمجهولين بيانيًّا.
2. صِف منطقة الحل للمتباينة $x \geq 4$ .
3. أوضح إن كنت تستطيع أن تستعمل النقطة $(0,0)$ كنقطة اختبار لتحديد المنطقة الواجب تظليلها عند حل المتباينة $3x+5y \leq 0$ .

## تمارين موجَّهة

4. **مـفـردات** أوضح كيف يُمكن للمستقيم $y=3x-4$ أن يكون خط حدود.

**حُلَ بيانيًّا كل متباينة.**

5. $y>-4$
6. $y\leq 2$
7. $y\geq x-3$
8. $y<-\frac{1}{3}x+2$

**حُلَ كل متباينة باستعمال التقاطعين الأفقي والرأسي.**

9. $3x+2y>12$
10. $5x-2y\leq 20$
11. $-4x+5y<-20$
12. **استهلاك** ذهبت ميان، ومعها 17 000 دينار، لشراء نوعَين من مغلَّفات القهوة السريعة التحضير. مغلَّف النوع الأول حبيباته مجمعّة وثمنه 2290 دينارًا ومغلَّف النوع الثاني حبيباته ناعمة وثمنه 3750 دينارًا.
   ارمز بالمجهول $x$ إلى عدد مغلَّفات النوع الأول، وبالمجهول $y$ إلى عدد مغلَّفات النوع الثاني.
   أ اكتب متباينة لتمثيل المسألة، وحُلّها بيانيًّا لتحديد عدد المغلَّفات التي يُمكن لميان أن تشتريها من كل نوع.
   ب كم مغلَّفًا من النوع الأول يُمكنها أن تشتري علمًا بأنها اشترت 3 مغلَّفات من النوع الثاني؟
13. **مدارس** يقوم طلاب الصف الحادي عشر ببيع نوعين من الأعمال الفنية لجمع مبلغ لا يقل عن 280 000 دينار. يؤمِّن العمل الواحد من النوع الأول ربحًا مقداره 1750 دينارًا بينما يؤمِّن العمل الواحد من النوع الثاني ربحًا مقداره 1250 دينارًا. ارمز بالمجهول $x$ إلى عدد أعمال النوع الأول وبالمجهول $y$ إلى عدد أعمال النوع الثاني.
   أ اكتب متباينة لتمثيل المسألة وحُلَّها بيانيًّا لتحديد عدد الأعمال التي ينبغي للطلاب بيعها من كل نوع.
   ب باع الطلاب 100 عمل من النوع الثاني وَ 50 عملاً من النوع الأول. هل حقَّق الطلاب هدفهم؟

**حلّ كلّ متباينة بالنسبة إلى $y$ ثم حلّها بيانيًا.**

**14** $\frac{1}{2}(6x-2y)\geq 4$ **15** $-\frac{3}{5}x+y\geq 2$ **16** $3(3x-y)>-12$

## تمارين وتطبيقات

**حُلّ بيانيًا كل متباينة.**

**17** $y\geq 6$ **18** $y<x+4$ **19** $y>-\frac{2}{5}x-3$

**حُلّ كل متباينة باستعمال التقاطعَين الأفقي والرأسي.**

**20** $4x+2y\geq 8$ **21** $3x-6y<12$

**22** **تسويق** كلفة الإعلان في الصحيفة المحلية 20 000 دينار في اليوم، وكلفته في الإذاعة المحلية 50 000 دينار عن كل دقيقة. كانت الميزانية المخصصة للإعلان في إحدى المؤسسات مليون دينار. ارمز بالمجهول $x$ إلى عدد أيام الإعلان في الصحيفة، وبالمجهول $y$ إلى عدد دقائق الإعلان في الإذاعة. اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، ثم حل المتباينة بيانيًا.

**23** **خلويّ** يبيع مريون نوعينْ من بطاقاتِ الهاتفِ الخلويّ، بطاقة بِـ 8000 دينار وبطاقة بِـ 12 000 دينار. لديه من البطاقات ما قيمته 200 000 دينار. ارمز بِـ $x$ إلى عدد بطاقات النّوع الأول وبِـ $y$ لعدد بطاقات النّوع الثّاني.

أ اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّ المتباينة بيانيًا

ب باع مريون 10 بطاقات من فئة 8000 دينار، كم بطاقةً يمكنه أن يبيع من الفئة الأخرى؟

**حُلّ كل متباينة بالنسبة إلى $y$، ثم حلّها بيانيًا.**

**24** $-4y<4(3x-5)$ **25** $-3(-10x+2y)\geq 24$ **26** $-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}y\leq -1$

**حُلّ بيانيًا كل متباينة.**

**27** $-4y>10x-20$ **28** $y-5\geq 4(x-2)$ **29** $6x+3y<0$

**30** $y+\frac{3}{4}\leq\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ **31** $\frac{9-3y}{2}\geq 6x$ **32** $x\leq 4$

**33** $4x-5y<7x-3y$ **34** $2x-5y\leq -4x+15$ **35** $x>-2$

**36** **مدارس** يُنظّم نادي الرياضيات في ثانوية الفرات حفلة غنائية لجمع مبلغ لا يقل عن 600 000 دينار لشراء طابعة خاصة بالنادي. قرر رئيس النادي أن يكون ثمن بطاقة الدخول 5000 دينار إذا تم شراؤها قبل يوم الحفلة، وَ 6000 دينار إذا تم شراؤها عند الباب.

أ ارمز بالمجهول $x$ إلى عدد البطاقات المبيعة قبل يوم الحفلة، وبالمجهول $y$ إلى عدد البطاقات المبيعة عند الباب. اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّ هذه المتباينة بيانيًا.

ب كان عدد البطاقات التي بيعت قبل الحفلة 30 بطاقة. كم بطاقة يجب بيعها عند الباب لكي يبلغ النادي هدفه؟

**37** **جمع أموال** قام طلاب الصف الحادي عشر ببيع فطائر بيتزا وعبوات مرطّبات خلال مباراة كرة السلة كي يجمعوا مبلغًا لا يقل عن 000 150 دينار لشراء هدية يقدّمونها إلى معلّم الرياضيات بمناسبة انتهاء العام الدراسي. يربح الطلاب 1250دينارًا من بيع كل فطيرة بيتزا وَ 500 دينار من بيع كل عبوة مرطبات. ارمز بالمجهول $x$ إلى عدد فطائر البيتزا، وبالمجهول $y$ إلى عدد عبوات المرطبات.

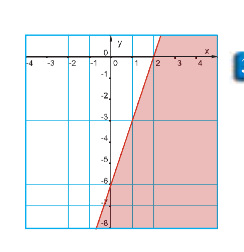
أ اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة.

ب باع الطلاب 75 فطيرة بيتزا وَ 150 عبوة مرطبات. هل سيتمكّنون من شراء الهدية؟

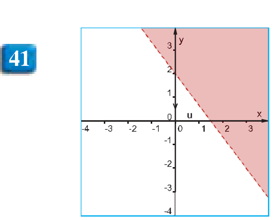
**38** **تفكير ناقد** ثمن بطاقة الدخول إلى حديقة الحيوانات 5000 دينار للكبار و 2000 دينار للصغار. زادت قيمة البطاقات المبيعة في أحد أيام الأسبوع على 000 300 دينار. كتب كل من دلشاد و دلير متباينة خطّية لتمثيل المسألة وحلّها بيانيًّا. رمز دلشاد بالمجهول $x$ إلى عدد بطاقات الكبار، بينما رمز دلير بالمجهول $x$ إلى عدد بطاقات الصغار. فيمَ اختلف الرسمان البيانيان اللذان أنشئا من قبل الطالبَين؟ هل أخطأ أحدهما؟ إذا أجبت بنعم فمن هو؟

**اكتب متباينة خطّية بمجهولين بحيث يُمثل الرسم البياني حلّها.**

**39**



**40**



**41**

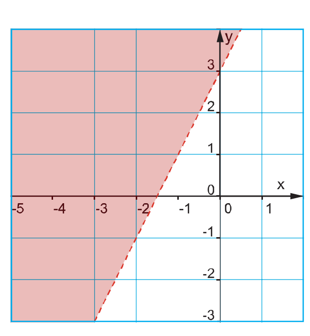
**42** **تفكير ناقد** قارن بين الحل البياني للمتباينة $x+90<30y$ والحل البياني للمتباينة $30y+x<90$ . بِمَ يتشابهان وبِمَ يختلفان؟

**43** يُنظّم نادي الصداقة حفل العشاء السنوي في قاعة الاحتفالات، بوضع طاولات مستديرة وأخرى مستطيلة، مع إمكانية وضع 8 مقاعد حول كل طاولة مستديرة، وَ 6 مقاعد حول كل طاولة مستطيلة. ارمز بالمجهول $x$ إلى عدد الطاولات المستديرة، وبالمجهول $y$ إلى عدد الطاولات المستطيلة.

أ اكتب متباينة خطّية لتمثيل المسألة، إذا كان عدد المقاعد المطلوبة لا يقل عن 220 مقعدًا، ثم حُلّ هذه المتباينة بيانيًّا.

ب تقتضي تدابير السلامة ألاّ يزيد عدد المقاعد على 300 مقعد. اكتب متباينة لتمثيل هذا الشرط، ثم حُلّ المتباينة بيانيًّا.

ج قارن بين الرسمَين البيانيَّين. بِمَ يختلفان؟



**44** أي متباينة تتمثَّل بالرسم البياني المقابل؟

(أ) $y<2x+3$

(ب) $4x-2y<-6$

(ج) $y\geq 2x+3$

(د) $4x+2y>6$

**45** أي نقطة لا تنتمي إلى منطقة حلّ المتباينة $5x-3y<30$؟

(أ) $(0,0)$

(ب) $(3,-5)$

(ج) $(-5,3)$

(د) $(-3,5)$

**46** أي متباينة تُكافئ المتباينة $7x-3y\geq 4$ (أي إن لهما منطقة الحل نفسها)؟

(أ) $y\leq \frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$

(ب) $y\leq -\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$

(ج) $y\geq -\frac{7}{3}x-\frac{4}{3}$

(د) $y\geq \frac{7}{3}x+\frac{4}{3}$

**47** أي نقطتين تُمثِّلان التقاطعين الأفقي والرأسي لخط حدود المتباينة $y\leq 3x-9$؟

(أ) $(3,0)$ وَ $(0,9)$

(ب) $(-9,0)$ وَ $(0,3)$

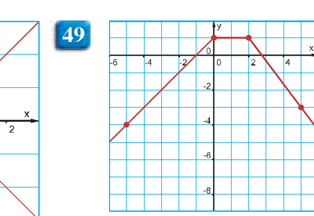
(ج) $(-3,0)$ وَ $(0,9)$

(د) $(3,0)$ وَ $(0,-9)$

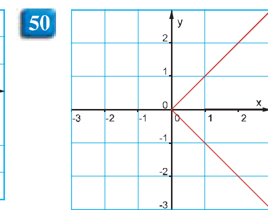
## نظرة إلى الوراء

استعمل اختبار المستقيم العمودي لتقرِّر إن كان البيان يُمثِّل دالّة. (الصفوف السابقة)

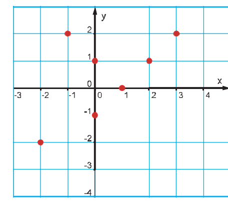
**48**



**49**



**50**



اكتب، على صورة الميل – التقاطع، معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة $(1,-7)$ والذي:

**51** يمرّ في النقطة $(1,3)$

**52** يبلغ ميله $0.25$

GRADE11-CHAP4-adabi(2)-13 2/12/15 12:56 PM Page 16

##

**53** تتيح قطعة نقود الـ 250 دينارًا ركن السيارة 8 دقائق في موقف السيارات، بينما تتيح قطعة الـ 500 دينار ركن السيارة 20 دقيقة. المدة القصوى لركن السيارة في الموقف 3 ساعات. عندما ركن شوان سيارته وجد أنّ عداد الموقف يمنحه 37 دقيقة مجانية. أيّ قطع نقدية عليه استعمالها لركن سيارته 3 ساعات؟

(أ) 3 قطع 250 دينارًا وَ 9 قطع 500 دينار.

(ب) 13 قطعة 250 دينارًا وَ قطعتا 500 دينار.

(ج) 8 قطع 250 دينارًا وَ 4 قطع 500 دينار.

(د) 5 قطع 250 دينارًا وَ 5 قطع 500 دينار.

# أنظمة المُتباينات الخطّية

## Systems of Linear Inequalities

**لماذا؟**

يستعمل مستكشفو القطب الجنوبي أنظمة المتباينات الخطّية لتحديد السرعة التي عليهم التقدم بها لئلاّ يواجهوا الأحوال المناخية المزعجة (المثال 2).

**الأهداف**

- يحل بيانيًّا أنظمة متباينات خطّية.

**المفردات**
**Vocabulary**

نظام المتباينات الخطّية
System of linear inequalities

عندما يُستعمل في مسألة، تعبير مثل «أكبر من» أو «لا يزيد على» فيُمكنك تمثيل الحالة باستعمال متباينة أو نظام متباينات خطّية.

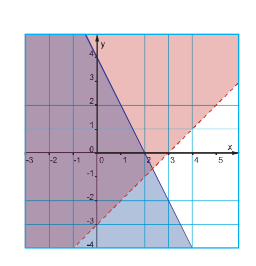
**نظام المتباينات الخطّية System of linear inequalities** هو مجموعة من متباينتَين خطّيتَين أو أكثر، تتناول المجاهيل نفسها. غالبًا ما تتألف مجموعة الحل لنظام من متباينتين خطّيتين بمجهولين من عدد غير محدود من الحلول يُمكن تمثيلها بيانيًّا بتظليل منطقة في المستوى الإحداثي. عندما تمثِّل بيانيًّا كلاً من متباينات النظام، في المستوي الإحداثي نفسه، تتقاطع المناطق المظلَّلة لتشكِّل منطقة مشتركة بينها كلها. منطقة الحل للنظام هي هذه المنطقة المشتركة.

### مثــــال 1

**حُلّ بيانيًا نظام المتباينتين الخطيتين.**

**الحــل**

(أ) $\begin{cases} y \leq -2x+4 \\ y > x-3 \end{cases}$

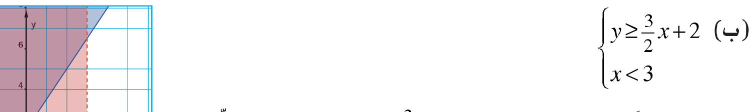


في المتباينة الأولى، ارسم المستقيم $y=-2x+4$ بخط متصل، وظلّل المنطقة تحته. وفي المتباينة الثانية، ارسم المستقيم $y=x-3$ بخط منقّط، وظلّل المنطقة فوقه. تقاطع المنطقتين المظلّلتين هو منطقة الحل لنظام المتباينتَين الخطيّتَين.

**تحقَّق:** اختبر نقطة من نقاط كل منطقة على المستوي الإحداثي.

| المنطقة | النقطة | $y \leq -2x+4$ | $y > x-4$ |
|---|---|---|---|
| إلى اليسار | (0,0) | $0 \overset{?}{\leq} -2(0)+4$<br>$0 \overset{?}{\leq} 4$ ✓ | $0 \overset{?}{>} 0-3$<br>$0 \overset{?}{>} -3$ ✓ |
| إلى اليمين | (4,0) | $0 \overset{?}{\leq} -2(4)+4$<br>$0 \overset{?}{\leq} -4$ ✗ | $0 \overset{?}{>} 4-3$<br>$0 \overset{?}{>} 1$ ✗ |
| إلى الأعلى | (2,2) | $2 \overset{?}{\leq} -2(2)+4$<br>$2 \overset{?}{\leq} 0$ ✗ | $2 \overset{?}{>} 2-3$<br>$2 > -1$ ✓ |
| إلى الأسفل | (2,−2) | $-2 \overset{?}{\leq} -2(2)+4$<br>$-2 \overset{?}{\leq} 0$ ✓ | $-2 \overset{?}{>} 2-3$<br>$-2 \overset{?}{>} -1$ ✗ |

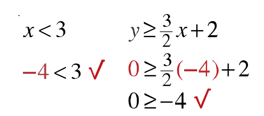
النقطة الأولى كانت النقطة الوحيدة بين هذه النقاط التي شكّل إحداثيّاها حلاً لنظام المتباينتين.



(ب) $\begin{cases} y \geq \frac{3}{2}x+2 \\ x<3 \end{cases}$

في المتباينة الأولى، ارسم المستقيم $y=\frac{3}{2}x+2$ بخط متصل وظلّل المنطقة الواقعة فوقه. وفي المتباينة الثانية، ارسم المستقيم $x=3$ بخط منقّط وظلّل المنطقة الواقعة إلى يساره. تقاطع المنطقتين المظلّلتَين هو منطقة الحل لنظام المتباينتَين الخطّيتَين.

**تحقّق:** اختبر نقطة من نقاط منطقة التقاطع، $(-4\ ,\ 0)$ مثلاً واختبر إن كان إحداثيّاها يشكّلان حلاً للنظام.



$y \geq \frac{3}{2}x+2$ | $x<3$

$0 \geq \frac{3}{2}(-4)+2$ | $-4<3$ ✓

$0 \geq -4$ ✓

بما أنّ النقطة تنتمي إلى منطقة حلّ نظام المتباينتَين، فإنّ منطقة التقاطع هي منطقة الحل.

**حــــاولْ** حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية.

أ $\begin{cases} x-3y<6 \\ 2x+y>1.5 \end{cases}$

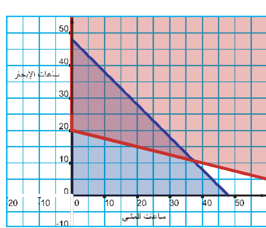
ب $\begin{cases} y \leq 4 \\ 2x+y<1 \end{cases}$

## تطبيق على حملات الاستكشاف

**مثــــــال** 2

**كانت حملة استكشاف القطب على بعد 240 km من قاعدتها. أعلنت مصلحة الأرصاد أن عاصفة ثلجية ستهبّ خلال 48 ساعة. على الحملة أن تتحرك بسرعة بركوب باخرة كاسحة جليد ثم بالسّير على الأقدام، لبلوغ القاعدة. سرعة الباخرة القصوى 12 km/h. أما السرعة القصوى في المشي وجر التجهيزات فلا تتعدى 3 km/h. اكتب نظام متباينات خطّية وحلّه بيانيًا لتحدد فترة ركوب الباخرة وفترة السير على الأقدام قبل بلوغ القاعدة.**

الحــل

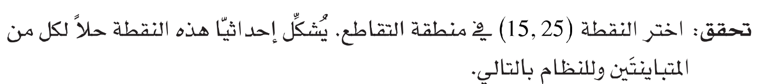



استعمل $x$ لعدد ساعات المشي، و $y$ لعدد ساعات ركوب الباخرة.
ينبغي أن يكون مجموع المجهولين أقل من 48 ساعة، مما يُعطي المتباينة $x+y \leq 48$. من ناحية أخرى، يجب ألاّ تقل المسافة التي تقطعها الحملة عن 240 km ، مما يُعطي المتباينة الثانية $3x+12y \geq 240$ .

نظام المتباينتَين الخطّيتَين هو $\begin{cases} x+y \leq 48 \\ 3x+12y \geq 240 \end{cases}$

ارسم المستقيم $3x+12y=240$ بخط متّصل وظلّل المنطقة الواقعة فوقه، ثم ارسم المستقيم $x+y=48$ ، وظلّل المنطقة الواقعة تحته. منطقة الحل للنظام هي منطقة تقاطع التظليلين.

**تحقق:** اختر النقطة $(15, 25)$ في منطقة التقاطع. يُشكّل إحداثيّا هذه النقطة حلاً لكل من المتباينتَين وللنظام بالتالي.



$x+y \leq 48$ | $3x+12y \geq 240$

$15+25 \leq 48$ | $3(15)+12(25) \geq 240$

$40 \leq 48$ ✓ | $345 \geq 240$ ✓

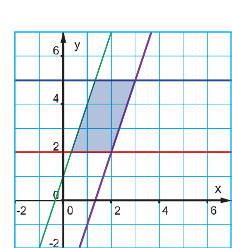
**حاول** تبيع سولاف شطائر لحم وشطائر دجاج. لديها 40 رغيفًا، أي إنها لا تستطيع أن تبيع أكثر من 40 شطيرة من النوعين معًا. يؤمِّن لها بيع شطيرة اللحم ربحًا قدره 2 000 دينار، وبيع شطيرة الدجاج ربحًا قدره 2 500 دينار وهي تريد أن تربح 90 000 دينار. اكتب نظام متباينات خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّه بيانيًّا.

يُمكن لنظام المتباينات الخطّية أن يتضمّن أكثر من متباينتَين.

## مثال 3 تطبيق هندسي

**حُلّ بيانيًّا نظام المتباينات الخطّية، وحدِّد طبيعة منطقة الحل.**

$$\begin{cases} y \leq 5 \\ y \geq 2 \\ y \leq 3x+1 \\ y \geq 3x-4 \end{cases}$$




**الحل**

ارسم بخط متصل المستقيم $y=5$ والمستقيم $y=3x+1$، وظلِّل المنطقة التي تقع تحت كل منهما.

ارسم بخط متصل المستقيم $y=2$ والمستقيم $y=3x-4$، وظلِّل المنطقة فوق كل منهما. منطقة الحل للنظام هي منطقة التقاطع.

منطقة الحل شكل رباعي. لاحظ أيضًا أن المستقيمين $y=5$ وَ $y=2$ متوازيان لأنهما مستقيمان أفقيان؛ وأن المستقيمين $y=3x+1$ وَ $y=3x-4$ متوازيان لأن لهما الميل نفسه.

منطقة الحل رباعي يوازي كل ضلع فيه الضلع المقابل. إنه متوازي أضلاع.

**حاول** **حُلّ بيانيًّا نظام المتباينات الخطّية، وحدِّد طبيعة منطقة الحل.**

أ $\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq \frac{1}{2}x+1 \\ y \geq -2x+4 \end{cases}$

ب $\begin{cases} y \leq 4 \\ y \geq -1 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+2 \end{cases}$

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1. أوضح كيف تحدِّد منطقة الحل لنظام متباينات خطّية.
2. ما العدد الأدنى لمتباينات نظام حتى تكون منطقة حلّه مثلّثًا؟ مربّعًا؟ أعطِ أمثلة تدعم جوابك.
3. قارن بين نظام متباينات خطّية ونظام معادلات خطّية.

## تمارين موجَّهة

**حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية.**

**4** $\begin{cases} y \geq 4x-4 \\ y \geq 3x-3 \end{cases}$ **5** $\begin{cases} x+y>5 \\ x-y<-3 \end{cases}$ **6** $\begin{cases} 7x<y-16 \\ y \leq -5x-2 \end{cases}$ **7** $\begin{cases} 2x+2y \leq 4 \\ 3x-y>1 \end{cases}$

**8** **جمع تبرعات** تجمع إحدى الجمعيات الخيرية تبرّعات ببيع قمصان قطنية. ثمن القميص للكبار 15 000 دينار وللصغار 10 000 دينار. عدد القمصان 250 قميصًا من النوعين. وتأمل الجمعية تحصيل مبلغ 3 ملايين دينار على الأقل. اكتب نظام متباينات خطّية لتمثيل الحالة، ثم حُلّه بيانيًّا لتحديد عدد القمصان التي ينبغي بيعها من كل نوع.

## تمارين وتطبيقات

**حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية وحدِّد طبيعة منطقة حلّه.**

**9** $\begin{cases} x \geq 9 \\ y \geq -18 \\ x \leq 13 \\ y \leq -4 \end{cases}$ **10** $\begin{cases} x \leq 7 \\ 2x-y \leq 3 \\ x+2y \geq -6 \end{cases}$ **11** $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq 3x+2 \\ y \geq -3x-10 \end{cases}$ **12** $\begin{cases} y \geq x \\ y \leq x+6 \\ x \leq 6 \\ x \geq -2 \end{cases}$

**حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية.**

**13** $\begin{cases} 5x-y>0 \\ y<x \end{cases}$ **14** $\begin{cases} 3y \geq 2x-3 \\ y \geq 3x+8 \end{cases}$ **15** $\begin{cases} x+y>5 \\ -2x+y \leq 2 \end{cases}$ **16** $\begin{cases} y>4 \\ x+4y \geq 8 \end{cases}$

**17** **موسيقى** تعتزم شركة إنتاج نسخ 10 000 نسخة من قرص مدمج لمجموعة أغنيات. خُصِّص عدد من الأقراص لتوزيعها مجانًا على محطات الإذاعة والتلفزيون، وعدد آخر للبيع. لا يتجاوز عدد الأقراص المجانية نسبة 20% من المجموع الكلّي. اكتب نظام متباينات خطّية يمثِّل الحالة، ويحدِّد الأعداد الممكنة للأقراص المجانية والأقراص المعدة للبيع.

**حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية وحدِّد طبيعة منطقة حلّه.**

**18** $\begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{3}x+y \geq -4 \\ \frac{1}{3}x+y \leq -1 \end{cases}$ **19** $\begin{cases} y \leq 2.5 \\ y \geq -0.5 \\ y \leq -x+8 \\ y \leq 2x+4 \end{cases}$

**20** $\begin{cases} y \leq x+6 \\ y \geq x+1 \\ y \leq -x+6 \\ y \geq -x-1 \end{cases}$ **21** $\begin{cases} y \leq x \\ y \leq -x+2 \\ y \geq 0 \end{cases}$

**هندسة** اكتب نظام متباينات خطّية تتخذ منطقة حلّه شكل:

**22** مستطيل **23** مثلث قائم **24** شبه منحرف

**25** **ضريبة الدخل** يُبيّن الجدول المقابل نسب الضريبة على الدخل وفقًا لقيمة دخل العائلة. كانت نسبة الضريبة لدخل سرجون وزوجته25% وكان دخل الزوجة يزيد على دخل الزوج بما لا يقل عن مليوني دينار. اكتب نظام متباينات خطّية لتمثيل المسألة، ثم حُلّ النظام بيانيًّا.

| نسب ضريبة الدخل وفق الشطور | |
|---|---|
| الدخل (بملايين الدنانير) | النسبة |
| من 14 إلى 56.800 | 15% |
| من 56.801 إلى 114.650 | 25% |
| من 114.651 إلى 174.700 | 28% |

**حُلّ بيانيًّا كل نظام متباينات خطّية، وحدّد ثلاث نقاط تقع في منطقة الحل.**

**26** $\begin{cases} -5y < 2x \\ 5y \geq 2x - 20 \end{cases}$

**27** $\begin{cases} y + 7 > 0 \\ y < 2x + 5 \\ y < -3x + 4 \end{cases}$

**28** $\begin{cases} y \geq -8 \\ x + 2y < 4 \\ x > -6 \end{cases}$

**29** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y \leq 2 \\ x - y > 3 \end{cases}$

**أعطِ معكوس كل عدد ومقلوبه.**

**30** 7 **31** $-\frac{3}{4}$ **32** 2.48 **33** $-1$

**اكتب معادلة للمستقيم:**

**34** الذي يمر في النقطتين $(2, -7)$ وَ $(1, 1)$

**35** المار في النقطة $(3,-3)$ وميله 0

**36** المار في النقطة $(-2, 4.5)$ والمتعامد مع المستقيم $y = 4x - 1$

**37** المار في النقطة $(3, 2)$ والموازي للمستقيم $y = -x - 7$

## نظرة إلى الأمام

**38** هل هناك قيمة للمجهول $m$ تجعل نظام المتباينات الخطّية $\begin{cases} y > -3x + 2 \\ y < mx - 3 \end{cases}$ من دون حلول؟ إذا كان الجواب نعم، أعطِ هذه القيمة. وإذا لا، أوضح السبب.

GRADE11-CHAP5-adabi(2)-13 2/12/15 12:57 PM Page 3

# المصفوفات Matrices

الفصل

5

الدروس


1. المصفوفات

2. المحدِّدات


**عالم التكنولوجيا**

يُمكنك استعمال المصفوفات لعرض المعطيات وتحليل اتِّجاهات تطوُّرها، مثل تزايد عدد المراهقين الذين يمتلكون هواتف خاصة مثلاً.

GRADE11-CHAP5-adabi(2)-13 2/12/15 12:58 PM Page 5

# المصفوفات Matrices

**لماذا؟**

تُستعمل المصفوفات لتنظيم المعطيات، كأن تُنَظِّمَ المعطيات عن موجودات محل تجاري. (المثال 3).

**الأهداف**

- يستعمل المصفوفات لتمثيل معطيات من الرياضيات ومن الواقع.
- يجمع المصفوفات ويطرحها.
- يضرب مصفوفة في عدد حقيقي.

**المفردات Vocabulary**

المصفوفة Matrix

رتبة المصفوفة Dimension

عنصر المصفوفة Entry

عنوان العنصر Adress

يُبيّن الجدول أدناه النشاط التجاري على مدى شهر نيسان لمحل يبيع الأدوات المنزلية. يُظهر الجدول موجودات المحل (جردة أول نيسان) والمبيعات (خلال شهر نيسان) والمشتريات (خلال شهر نيسان أيضًا).

| | الموجودات في أول نيسان | | المبيعات خلال شهر نيسان | | المشتريات خلال شهر نيسان | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | صغيرة | كبيرة | صغيرة | كبيرة | صغيرة | كبيرة |
| طاولات الحديقة | 8 | 10 | 7 | 9 | 15 | 20 |
| مواقد الشواء | 15 | 12 | 15 | 12 | 18 | 24 |

يمكنك تمثيل المعطيات عن موجودات المحل باستعمال **مصفوفة**.

مصفوفة الموجودات ←

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{صغيرة} & \text{كبيرة} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{طاولات للحديقة} \\ \text{مواقد للشواء} \end{array} \quad M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

**المصفوفة Matrix** هي جدول مستطيل مؤلَّف من خلايا يُحيط به قوسان قائمان وتتضمّن كل خلية عددًا يُسمى **عنصرًا Entry** من عناصر المصفوفة. **رتبة Dimension** المصفوفة تدل على عدد صفوفها وعدد أعمدتها، وهي تُكتب على الشكل التالي: **عدد الصفوف × عدد الأعمدة**. فإذا كان للمصفوفة صفّان وثلاثة أعمدة، فإن رتبتها هي 3 × 2 (اقرأ 2 في 3). أما رتبة مصفوفة الموجودات أعلاه فهي 2 × 2. لكل عنصر من عناصر المصفوفة **عنوان Adress** يدل على موقعه في المصفوفة. يتكوّن عنوان العنصر من رقم الصف الموجود عليه، متبوعًا برقم العمود الذي يحويه. فالعنصر 10 في المصفوفة أعلاه هو العنصر الموجود على الصف 1 والعمود 2. نرمز إلى هذا العنصر بالرمز $m_{12}$ .

## مثال 1 استعمال المصفوفات لعرض المعطيات

**استعمل معطيات المبيعات خلال شهر نيسان.**

**أ استعمل مصفوفة لعرض المعطيات.**

مصفوفة المبيعات ←

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{صغيرة} & \text{كبيرة} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 15 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{طاولات للحديقة} \\ \text{مواقد للشواء} \end{array} \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix}$$

**ب ما رتبة المصفوفة $S$ ؟**

للمصفوفة $S$ صفّان وعمودان. رتبتها إذن 2 × 2 .

**ج ما العنصر $s_{12}$ ؟**

يقع العنصر $s_{12}$ عند تقاطع الصف الأول والعمود الثاني، إنه 9 . يدل هذا العنصر على أن المحل باع في نيسان 9 طاولات كبيرة للحديقة.

**د** **ما عنوان العنصر 15 ؟**

يقع العنصر 15 على تقاطع الصف الثاني مع العمود الأول، إنه العنصر $S_{21}$ .

**حـــاولْ** **استعمل المصفوفة المقابلة للإجابة.**

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 9 \\ 12 & 11 & 4 & 12 \end{bmatrix}$$

أ ما رتبة المصفوفة $M$ ؟

ب ما هو العنصر $m_{32}$ ؟

ج يظهر الصفر في موقعَيْن، ما عنوان كل منهما؟

تتساوى مصفوفتان إذا كانتا من الرتبة نفسها، وإذا تساوت العناصر المتقابلة في المصفوفتَيْن (أي العناصر التي لها العنوان نفسه في المصفوفتين).

**مثــــــال** 2 **تَساوي المصفوفات**

**حدِّد قيمة كل من $x$ وَ $y$ بحيث تتساوى المصفوفتان.**

$$\begin{bmatrix} 2x+4 & 5 & 1 \\ -2 & -3y+5 & -4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 5 & 1 \\ -2 & 5y-3 & -4 \end{bmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن $2x+4=12$ وَ $-3y+5=5y-3$

$2x=8$ وَ $-8y=-8$

$x=4$ وَ $y=1$

**حـــاولْ** حدِّد قيمة كل من $x$ و $y$، بحيث تتساوى المصفوفتان.

$$\begin{bmatrix} -3 & -2x & -3 \\ -2 & 3y & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & -15 & -3 \\ -2 & -2y+15 & -12 \end{bmatrix}$$

## جمع المصفوفات وطرحها

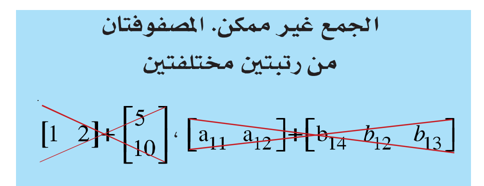
| بالكلمات | عدديًا | جبريًا |
| --- | --- | --- |
| لكي تجمع مصفوفتين أو تطرحهما، اجمع العناصر المتقابلة أو اطرحها. | $[1 \quad 2]+[5 \quad 10]=[6 \quad 12]$ | $[a_{11} \quad a_{12}]+[b_{11} \quad b_{12}]=[a_{11}+b_{11} \quad a_{12}+b_{12}]$ |

لكي تجمع مصفوفتين أو تطرح إحداهما من الأخرى، يجب أن تكون المصفوفتان من الرتبة نفسها.

**الجمع ممكن. المصفوفتان من الرتبة نفسها**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**الجمع غير ممكن. المصفوفتان من رتبتين مختلفتين**



## مثال 3 جمع المصفوفات وطرحها

**استعمل المصفوفات التالية للإجابة عن الأسئلة.**

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ 3 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

**اجمع أو اطرح حيث يكون ذلك ممكنًا.**

**أ** $A+C$

اجمع كل عنصر في المصفوفة الأولى مع العنصر الذي يقابله في المصفوفة الثانية.

$$A+C=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+3 & -2+2\\ -3+0 & 10+(-9)\\ 2+(-5) & 6+14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ -3 & 1\\ -3 & 20\end{bmatrix}$$

**ب** $C-A$

$$C-A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\\ -5 & 14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-4 & 2-(-2)\\ 0-(-3) & (-9)-10\\ -5-2 & 14-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 3 & -19\\ -7 & 8\end{bmatrix}$$

**ج** $C+B$

بما أن رتبة المصفوفة $C$ $(3\times2)$ تختلف عن رتبة المصفوفة $B$ $(2\times3)$ فإن عملية الجمع غير ممكنة.

**حاول** **اجمع أو أطرح عندما يكون ذلك ممكنًا.**

أ $B+D$ ب $B-A$ ج $D-B$

تعلم أن الضرب هو جمع مُكرّر. يصح هذا الأمر على ضرب المصفوفة في عدد.

فإذا كانت $M=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ يُمكنك كتابة $M+M$ على الصورة $2M$ .

يُمكنك ضرب مصفوفة في عدد. للقيام بذلك، اضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد.

$$2\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2 & 2\times0\\ 2\times1 & 2\times5\end{bmatrix}$$

## مثال 4 تطبيق على التجارة

**بالعودة إلى النشاط التجاري لمحل بيع الأدوات المنزلية، احسب المصفوفة $M-S+D$ حيث $M$ مصفوفة الموجودات وَ $S$ مصفوفة المبيعات وَ $D$ مصفوفة المشتريات . ماذا تمثّل المصفوفة الناتجة؟**

$$M-S+D=\begin{bmatrix}8 & 10\\ 15 & 12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 9\\ 15 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 20\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-7+15 & 10-9+20\\ 15-15+18 & 12-12+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 21\\ 18 & 24\end{bmatrix}$$

| | صغيرة | كبيرة |
|---|---|---|
| طاولات للحديقة | 16 | 21 |
| مواقد للشواء | 18 | 24 |

تمثّل المصفوفة الناتجة موجودات المحل في نهاية شهر نيسان. كان في المحل، في نهاية شهر نيسان، 16 طاولة حديقة صغيرة و 21 كبيرة؛ كما كان فيه 18 موقدًا صغيرًا وَ 24 كبيرًا.

**حاولْ** احسب المصفوفة $A+2B-3C$ حيث

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix} ، B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\-2 & 5\end{bmatrix} ، C=\begin{bmatrix}0 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}$$

## مثال 5 كتابة المقادير المصفوفية على أبسط صورة

**استعمل المصفوفات التالية للإجابة عن الأسئلة.**

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 10\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\3 & 2 & 8\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}-6 & 3 & 8\end{bmatrix}$$

**اكتب على أبسط صورة.**

**أ** $2A-3B$ إن كان ذلك ممكنًا.

$$2A-3B=2\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

بما أن ضرب مصفوفة في عدد لا يغيّر رتبتها، فإن رتبتَي المصفوفتَيْن $2A$ و $3B$ غير متساويتَيْن، مما يجعل الطرح غير ممكن.

**ب** $C-2A$

$$C-2A=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}4 & -2\\-3 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-2)\times 4 & (-2)\times(-2)\\(-2)\times(-3) & (-2)\times 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 2\\0 & -9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & 4\\6 & -20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 6\\6 & -29\end{bmatrix}$$

**حاولْ** اكتب على أبسط صورة عندما يكون ذلك ممكنًا.

أ $2B+3C$ ب $4A-3C$ ج $D+0.5D$

### خصائصُ المصفوفات وطرحها

| بالكلمات | عدديًا | جبريًا |
|---|---|---|
| **خاصِّية التبديل** جمع المصفوفات عملية تبديلية. | $\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 7\\3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}$ | $A+B=B+A$ |
| **خاصية التجميع** جمع المصفوفات عملية تجميعية. | $\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ | $A+B+C$ $=(A+B)+C$ $A+(B+C)$ |
| **المصفوفة المحايدة في الجمع** المجموعة الصفرية هي عنصر محايد في جمع المصفوفات. | $\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{bmatrix}$ | $A+0=A$ |
| **معكوس المصفوفة** معكوس المصفوفة $M$ هي المصفوفة الناتجة عن إحلال محل كل عنصر من عناصر $M$ معكوسه. | $\begin{bmatrix}-2 & 5\\9 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -5\\-9 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ | إذا كانت $B$ معكوس $A$ فإن $A+B=0$ حيث 0 مصفوفة صفرية. |

# التمـــــاريـــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** جِد جميع الرتب الممكنة لمصفوفة عدد عناصرها 8 . أوضح كيف وجدتها.

**2** صِف عملية على المصفوفات تؤدي إلى عكس إشارة كل عنصر من عناصرها.

## تمارين موجَّهة

**3** **مـفـردات** تُشكِّل القيمة الموجودة على تقاطع صف وعمود في المصفوفة ــــــــ (عنصرًا أو عنوان عنصر).

**4** عمل هشيار وشيركو ودلسوز في بيع البطاقات لحفل نهاية السنة الدراسية. يُبيّن الجدول أدناه المعطيات التي تتعلّق بما باعوه من بطاقات.

| بيع بطاقات حفل نهاية السنة الدراسية | | | |
|---|---|---|---|
| الطالب | بطاقات منفردة | دفاتر بطاقات | المبلغ الكليّ |
| هشيار | 39 | 15 | 114 000 دينار |
| شيركو | 108 | 8 | 143 000 دينار |
| دلسوز | 13 | 25 | 138 000 دينار |

أ استعمل مصفوفة $A$ لعرض معطيات الجدول.

ب ما رتبة المصفوفة $A$ ؟

ج ما العنصر $a_{13}$ ؟ ماذا يُمثِّل ؟

د ما عنوان العنصر 143 000 ؟

**5** حدِّد قيمة كل من $x$ وَ $y$ بحيث تتساوى المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & x+8 \\ 2y-1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{وَ} \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 14-x \\ -13-y & 0 \end{bmatrix}$$

**استعملْ المصفوفات التالية لحل التمارين من 6 إلى 9. اجمع أو اطرح عندما يكون ذلك ممكنًا.**

$$A=\begin{bmatrix} 1.5 & 3.8 & 3 \\ -1.2 & 2.4 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} -1 & 1.1 & 6 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2.3 & 1 \end{bmatrix}$$

**6** $A+B$ **7** $B-C$ **8** $B-A$ **9** $B+A$

**10** **استهلاك** يُبيّن الجدول المقابل أسعار ثلاثة أنواع من ألبسة الرياضة قبل تطبيق الضريبة عليها. مثّل هذه الأسعار في مصفوفة $M$، ثم جِد المصفوفة $T$ التي تُمثّل قيمة الضريبة لكل نوع، علمًا بأن النسبة المئوية للضريبة هي 8.25% . اكتب المصفوفة $A$ التي تُمثّل أسعار الأنواع الثلاثة بعد إضافة الضريبة.

| أسعار الملابس الرياضية | | | |
|---|---|---|---|
| | عادي | مع شعار | تفصيل |
| قميص قطني | 9 000 | 13 000 | 14 000 |
| سروال قصير | 6 000 | 9 500 | 11 000 |
| سروال طويل | 15 000 | 21 000 | 23 000 |

**استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 11 إلى 14. اكتب الناتج على أبسط صورة، عندما يكون ذلك ممكنًا.**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

**11** $3B$ **12** $\frac{1}{2}C$ **13** $A-2B$ **14** $2C-A$

## تمارين وتطبيقات

**15** استعمل معطيات الجدول للإجابة عن الأسئلة.

أ) استعمل مصفوفة $A$ لعرض معطيات الجدول.

ب) ما رتبة المصفوفة $A$ ؟

ج) ما العنصر $a_{32}$ ؟ ماذا يُمثّل؟

د) ما عنوان العنصر 385 980 ؟

| خيارات السفر | | | |
|---|---|---|---|
| الدرجة | بطاقة | فندق | سيارة |
| أولى | 425 500 | 396 000 | 65 990 |
| أعمال | 385 980 | 245 500 | 45 900 |
| اقتصادية | 275 120 | 103 250 | 29 500 |

**16** حدِّد قيمة $x$ و $y$ بحيث تتساوى المصفوفتان:

$$\begin{bmatrix}2x & y+1 & -2y\end{bmatrix} \text{ وَ } \begin{bmatrix}3x-2y & 14 & -x\end{bmatrix}$$

**استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 17 إلى 20. اجمع أو اطرح حيث يكون ذلك ممكنًا.**

$$D=\begin{bmatrix}5.1 & 2.5\\ -2 & 0\\ 0 & 1.5\end{bmatrix} \quad E=\begin{bmatrix}3.2 & -1\\ -1.5 & 2.4\end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix}-4.2 & -1\\ 2.2 & 0\end{bmatrix}$$

**17** $F-E$ **18** $D+E$ **19** $D+F$ **20** $E+F$

**21** **دراسة جامعية** يُبيّن الجدول أدناه الكلف السنوية للدراسة الجامعية.

| القيمة التقديرية للكلفة السنوية للدراسة الجامعية | | | |
|---|---|---|---|
| | جامعة خاصة | جامعة رسمية وطنية | جامعة رسمية أجنبية |
| الكلفة بالدينار | 27 677 000 | 12 841 000 | 19 188 000 |

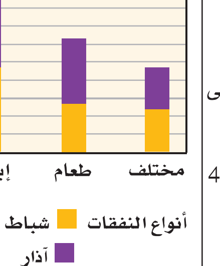
يُقدّر الخبراء أن هذه الكلف سوف تزداد 5% العام المقبل. استعمل ضرب مصفوفة في عدد لتجد القيمة التقديرية للدراسة في كل نوع من الأنواع الثلاثة في العام المقبل.

**استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 22 إلى 25. اكتب الناتج على أبسط صورة حيث يكون ذلك ممكنًا.**

$$G=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad J=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

**22** $2G$ **23** $\frac{1}{2}(H+J)$ **24** $2K-G$ **25** $H-0.3G$

**26** **تقدير** يُبيّن الرسم البياني المقابل ما حصلت عليه كلارا بعد أن استعملت الحاسوب لتدوين نفقاتها خلال شهرَي شباط وآذار. استعمل مصفوفة $F$ $(3\times1)$ لتمثيل نفقاتها خلال شهر شباط وأخرى $M$ لتمثيل نفقاتها خلال شهر آذار. اجمع المصفوفتين لتحصل على نفقاتها الكلية خلال الشهرين.




**27** **هندسة** تُمثّل المصفوفة $\begin{bmatrix}2 & 2.5\\ 3 & 3.5\end{bmatrix}$ أنصاف أقطار 4 دوائر.
اكتب المصفوفة التي تُمثّل محيطات هذه الدوائر.

**تفكير ناقد** **اذكر إن كانت المقولة صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا، أو خطأ دائمًا.**

**28** يُمكن جمع مصفوفتين لهما العدد نفسه من العناصر.

**29** يُمكن جمع مصفوفتين إذا اختلف عدد العناصر بينهما.

**30** يُمكن جمع مصفوفتين لكل منهما 3 صفوف وَ 4 أعمدة.

**31** إذا كان ممكنًا جمع مصفوفتين، فإن طرحهما ممكن أيضًا.

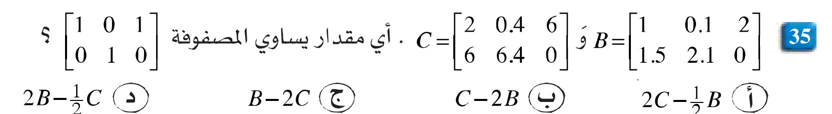
**32** حدِّد قيم $x$ وَ $y$ وَ $z$ بحيث تصح المساواة المصفوفية.

$$\begin{bmatrix}3 & x\\ -2 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}11 & -4\\ y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & -10\\ 9 & z\end{bmatrix}$$

**33** **خطأ في التحليل** أوضح الخطأ: $\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 11 & 0\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$

**34** **اكتب** هل طرح المصفوفات عملية تبديلية؟ أعطِ مثالاً يدعم جوابك.

GRADE11-CHAP5-adabi(2)-13 2/12/15 12:58 PM Page 10

**35**  $B=\begin{bmatrix}1 & 0.1 & 2\\ 1.5 & 2.1 & 0\end{bmatrix}$ وَ $C=\begin{bmatrix}2 & 0.4 & 6\\ 6 & 6.4 & 0\end{bmatrix}$ . أي مقدار يساوي المصفوفة $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ ؟

(أ) $2C-\frac{1}{2}B$ (ب) $C-2B$ (ج) $B-2C$ (د) $2B-\frac{1}{2}C$

**36** أي من المقولات التالية تصحّ دائمًا في المصفوفة $E$ من الرتبة $m\times n$؟

(أ) عدد عناصرها $m\times n$ (ب) لها عنصر $e_{nm}$

(ج) عدد عناصرها $m+n$ (د) لها $m$ عمود وَ $n$ صف.

**37** ما قيمة $x$ التي تحقِّق $8\begin{bmatrix}12 & 8\\ 2 & 7\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}48 & 32\\ 8 & 28\end{bmatrix}$ ؟

(أ) 0.25 (ب) 0.5 (ج) 2 (د) 4

**38** **جواب مختصر** جِد قيمة $x$ التي تحقِّق $[2\quad -2]-2[5\quad -x]=[-8\quad -1]$ .

## نظرة إلى الوراء

**39** **نقود** مع شيلان 36 قطعة نقود من فئتي ألف دينار وَ 500 دينار. ما قيمة هذا المبلغ، علمًا بأن عدد القطع من فئة 500 دينار هو ضعف عدد القطع من ألف دينار؟

**حدِّد إن كانت النقطة المعطاة حلاً لنظام المعادلتَيْن.** (الصفوف السابقة)

**40** $(2, -2)$ ؛ $\begin{cases}x-y=4\\ 5x+6y=2\end{cases}$

**41** $(4.5, 2)$ ؛ $\begin{cases}y=2\\ 2x-4y=1\end{cases}$

## نظرة إلى الأمام

**42** جِد المصفوفة $B$ حيث تصح المساواة $3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & -4\end{bmatrix}-2B=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 2\end{bmatrix}$ .

# المحددات وقاعدة كرامر
## Determinants and Cramer's Rule

**لماذا؟** يحتاج خبراء تغذية الرياضيّين أن يحلوا أنظمة معادلات خطّية لتحديد كميات السعرات الحرارية والبروتين والدهون والكربو هيدرات التي يحتاج إليها الرياضي في غذائه. (المثال 4).

**الأهداف**
- يحسب محدِّد مصفوفة $2 \times 2$ أو $3 \times 3$.
- يحل نظامًا خطّيًّا باستعمال قاعدة كرامر.

يُزاوج علماء الرياضيات بين المصفوفات المربّعة والأعداد، بحيث يقابل كل مصفوفة مربَّعة عدد حقيقي يُسمّى **مُحدِّد المصفوفة Determinant** . يُستعمل الرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ للدلالة على محدِّد المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. لمحدِّد المصفوفة دور مهم كما سترى لاحقًا. أيضًا).

**المفردات Vocabulary**
- المحدِّد Determinant
- مصفوفة المعاملات Coefficient matrix
- قاعدة كرامر Crame's rule

### محدد مصفوفة 2 × 2

| بالكلمات | عدديًا | جبريًا |
|---|---|---|
| محدِّد Determinant المصفوفة $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو $ad - bc$ | $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ <br> $= (1)(4) - (3)(2) = -2$ | $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ <br> $= ad - bc$ |

### مثال 1 إيجاد محدِّد مصفوفة 2 × 2

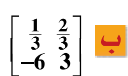
جِد محدِّد المصفوفة.

**أ** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 6 \times 3 - 5 \times 8$$

$$= 18 - 40 = -22$$ اطرح ناتج ضرب الوسطين من ناتج ضرب الطرفين.

محدِّد المصفوفة هو $-22$.

**ب**  $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 3 - \frac{2}{3}(-6) = 1 + 4 = 5$$

**حـــاولْ** جِد محدِّد المصفوفة.

أ $\begin{bmatrix} 0.2 & 30 \\ -0.3 & 5 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ ج $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 4 & 2\pi \end{bmatrix}$

يُمكنك أن تستعمل المحدِّدات لحل أنظمة المعادلات الخطّية. لحل النظام $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

ابدأ بكتابة المصفوفة $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ التي تُسمى **مصفوفة المعاملات** **Coefficient matrix**.

واحسب محدِّدها $D$ ، ثم احسب المحدّدين $D_x=\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$ وَ $D_y=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}$ .

استعمل بعد ذلك قاعدة كرامر التالية:

## قاعدة كرامر للأنظمة 2 × 2

إذا كان محدّد مصفوفة العوامل $D$ مختلفًا عن 0، فإن للنظام $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

حل وحيد هو $x=\frac{D_x}{D}$ وَ $y=\frac{D_y}{D}$ ، حيث $D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ، $D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

يمكنك استعمال المحدِّدات $D$ وَ $D_x$ وَ $D_y$ لتعرف إن كان النظام محدَّدًا (له حل وحيد) أو مستحيلاً (لا حلول له) أو غير محدَّد (له عدد غير محدود من الحلول). في التصنيف التالي سنفترض أنّ $a_1$ وَ $b_1$ ليسا صفرًا في الوقت نفسه، وأنّ $a_2$ وَ $b_2$ ليسا صفرًا في الوقت نفسه.

| تصنيف الأنظمة من معادلتين خطّيتين بمجهولين | | |
|---|---|---|
| إذا كان $D\neq 0$ فالنظام محدَّد. | إذا كان $D=0$ وَ $D_x=D_y=0$ فالنظام غير محدَّد. | إذا كان $D=0$ وَ $D_x\neq 0$ أو $D_y\neq 0$ فالنظام مستحيل. |

## مثـــــال 2 حل الأنظمة الخطّية 2×2 باستعمال قاعدة كرامر

حُلِّ النظام الخطّي باستعمال قاعدة كرامر.

أ $\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-y=-1 \end{cases}$

**الخطوة 1** جِد محدِّد مصفوفة العوامل.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1(-1)-2(-1)=1$$

النظام محدَّد لأنّ $D\neq 0$

**الخطوة 2** جد المحدِّدين $D_x$ وَ $D_y$ .

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7 \quad ، \quad D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-4$$

**الخطوة 3** جد قيمة $x$ وَ قيمة $y$ .

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-7}{1}=-7 \quad ; \quad x=\frac{D_x}{D}=\frac{-4}{1}=-4$$

للنظام حل وحيد هو $(-4, -7)$.

**ب** $\begin{cases} y-2=3x \\ 3x-y=7 \end{cases}$

**الخطوة 1** اكتب النظام على الصورة العامة.

$$\begin{cases} 3x-y=-2 \\ 3x-y=7 \end{cases}$$

**الخطوة 2** جِد محدِّد مصفوفة العوامل.

$$D=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=3(-1)-3(-1)=0$$

**الخطوة 3** احسب $D_x$ .

$$D_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 7 & -1\end{vmatrix}=9$$

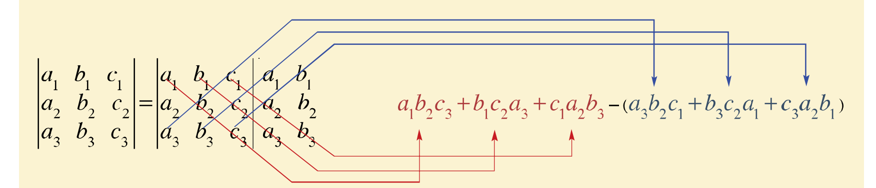
بما أن $D=0$ وَ $D_x \neq 0$ فإن النظام مستحيل.

**حــــاوِلْ** حُلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر $\begin{cases} 6x-2y=14 \\ 3x=y+7 \end{cases}$.

لكي تستعمل قاعدة كرامر لحل نظام خطي 3×3، عليك أن تحسب محدِّدات مصفوفات من الرتبة 3×3. يُبيّن المخطّط أدناه إحدى الطرق للقيام بذلك.

اكتب العمودين الأوّلين إلى يمين المحدِّد.

اجمع نواتج ضرب أعداد كل قطر أحمر، ثم اطرح نواتج ضرب أعداد كل قطر أزرق.




**مثـــــال** 3 **حساب محدِّد مصفوفة 3 × 3**

جِد محدِّد المصفوفة $A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0\\ -3 & 10 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{bmatrix}$ .

اكتب المحدِّد، ثم اكتب العمودين الأولين إلى يمين المحدِّد: $\begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -3 & 10 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}4 & -2\\ -3 & 10\\ 2 & 6\end{matrix}$

**الخطوة 1** احسب ناتج ضرب أعداد كل قطر نازل واجمع النواتج.

$(4)(10)(-1)+(-2)(1)(2)+(0)(-3)(6)=-44$

**الخطوة 2** احسب ناتج ضرب أعداد كل قطر صاعد واجمع النواتج.

$(2)(10)(0)+(6)(1)(4)+(-1)(-3)(-2)=18$

**الخطوة 3** اطرح المجموع الثاني من المجموع الأول.

$-44-18=-62$

محدِّد المصفوفة $A$ يساوي $-62$ .

**تحقَّق** استعمل الحاسبة البيانية.

**حــاولْ** جِد محدِّد المصفوفة $A=\begin{vmatrix}2 & -3 & 4\\ 5 & 1 & -2\\ 10 & 3 & -2\end{vmatrix}$ .

يمكن توسيع قاعدة كرامر لتشمل الأنظمة الخطّية 3×3.

### قاعدة كرامر للأنظمة 3 × 3

إذا كان محدِّد مصفوفة العوامل مختلفًا عن 0 فإن للنظام

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases}$$

حل وحيد هو $x=\frac{D_x}{D}$ ، $y=\frac{D_y}{D}$ ، $z=\frac{D_z}{D}$

حيث $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ ، $D_x=\begin{vmatrix}d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ ، $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}$ ، $D_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & d_3\end{vmatrix}$

إذا كان $D\neq 0$ ، فللنظام حل وحيد.

إذا كان $D=0$ وَ($D_x\neq 0$ أو $D_y\neq 0$ أو $D_z\neq 0$) فالنظام مستحيل.

إذا كان $D=0$ و($D_z=D_y=D_x=0$) فالنظام غير محدّد.

**مثـــال 4** **تطبيق غذائي**

**يعمل أحد خبراء التغذية على تصميم نظام تغذية للاعبي كرة القدم. يتطلب النظام من اللاعب استهلاك 3600 سعرة حرارية وَ 750 g من الطعام يوميًا. يجب أن تشكِّل السعرات الحرارية التي مصدرها البروتين والدهون 60% من مجموع السعرات الحرارية. كم غرامًا من البروتين والكربوهيدرات والدهون يتطلب هذا النظام.**

| السعرات الحرارية في الغرام | |
|---|---|
| الطعام | السعرات |
| بروتين | 4 |
| كربوهيدرات | 4 |
| دهون | 9 |

يتضمّن النظام الغذائي $p$ غرامًا من البروتين، وَ $c$ غرامًا من الكربوهيدرات وَ $f$ غرامًا من الدهون.

$4p+4c+9f=3600$ مجموع السعرات الحرارية.

$p+c+f=750$ كمية الطعام الكلية.

$4p+0c+9f=2160$ سعرات البروتين والدهون تساوي $60\%(3600)=2160$

$$Df=\begin{vmatrix}4&4&3600\\1&1&750\\4&0&2160\end{vmatrix}،\ Dc=\begin{vmatrix}4&3600&9\\1&750&1\\4&2160&9\end{vmatrix}،\ Dp=\begin{vmatrix}3600&4&9\\750&1&1\\2160&0&9\end{vmatrix}،\ D=\begin{vmatrix}4&4&9\\1&1&1\\4&0&9\end{vmatrix}=-20$$

$$f=\frac{Df}{D}=\frac{-2400}{-20}=120،\ c=\frac{Dc}{D}\frac{-7200}{-20}=360،\ p=\frac{Dp}{D}=\frac{-5400}{-20}=270$$

يتضمّن النظام $270\ g$ من البروتين وَ $360\ g$ من الكربوهيدرات وَ $120\ g$ من الدهون.

**حـــاولْ** **ماذا لو...؟** يتطلَّب النظام استهلاك 3200 سعرة حرارية وَ $700\ g$ من الطعام يوميًّا. يجب أن تشكِّل السعرات الحرارية التي مصدرها الكربوهيدرات 70% من مجموع السعرات الحرارية. كم غرامًا من البروتين والكربوهيدرات والدهون يتطلَّب هذا النظام؟

# التمــــاريــــن

## التواصل في الرياضيات

**1** صِف مصفوفة لا محدد لها.

**2** كيف تعرف ما ستكون عليه المحدِّدات الثلاثة عندما تطبِّق قاعدة كرامر على نظام خطِّي من معادلتَيْن بمجهولَين، إذا كانت إحدى المعادلتَيْن ناتجة من ضرب الثانية في عدد؟

**3** **مـفـردات** ما معنى أن يكون أحد عناصر مصفوفة المعاملات صفرًا؟

## تمارين موجَّهة

**جِد محدِّد المصفوفة.**

**4** $\begin{bmatrix}7&5\\9&2\end{bmatrix}$ **5** $\begin{bmatrix}1.5&0.25\\6&2.5\end{bmatrix}$ **6** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}\\\frac{3}{4}&-4\end{bmatrix}$ **7** $\begin{bmatrix}-3&40\\-5&66\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

**استعمل قاعدة كرامر لحل النظام الخطّي.**

**8** $\begin{cases}6x=2-y\\3x+1=2y\end{cases}$ **9** $\begin{cases}4x+y+6=0\\8x+2y=9\end{cases}$ **10** $\begin{cases}5x-2y=3\\2.5x-y=1.5\end{cases}$ **11** $\begin{cases}2y=2-x\\-3x+6y=-9\end{cases}$

**جِد محدِّد المصفوفة.**

**12** $P=\begin{bmatrix}1&2&-1\\4&0&1\\1&-2&3\end{bmatrix}$ **13** $S=\begin{bmatrix}0&-5&-1\\4&1&6\\2&0.5&3\end{bmatrix}$ **14** $E=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$

**15** **استهلاك** اشترت هتاو $2\,kg$ من الفستق وَ $1.5\,kg$ من اللوز وَ $3\,kg$ من البندق. ودفعت 28 420 دينارًا، بينما دفعت صديقتها دوين 39 390 دينارًا ثمن $4.5\,kg$ من الفستق وَ $2\,kg$ من البندق. ما ثمن الكيلوغرام من كل نوع، علمًا بأن ثمن الكيلوغرام من اللوز يساوي مجموع ثمنَي كيلوغرام من الفستق وكيلوغرام من البندق.

## تمارين وتطبيقات

جِد محدِّد المصفوفة.

**16** $\begin{bmatrix} 3 & -0.4 \\ 5 & 0.3 \end{bmatrix}$

**17** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**18** $\begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & 8 \\ -\frac{1}{2} & 10 \end{bmatrix}$

**19** $\begin{bmatrix} r & -1 \\ -2r^2 & \pi r \end{bmatrix}$

استعمل قاعدة كرامر لحل النظام الخطّي.

**20** $\begin{cases} 0.5x+6y=2 \\ 0.25x+3y=0.5 \end{cases}$

**21** $\begin{cases} x+2y=3.5 \\ 3x-y=2.7 \end{cases}$

**22** $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x+\frac{y}{2}=2 \end{cases}$

**23** $\begin{cases} 3y-x=7 \\ 2x+3y=-7 \end{cases}$

جِد محدِّد المصفوفة.

**24** $A=\begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 & 0 \\ 3.2 & 1 & -4 \\ 6.4 & -5 & 2.1 \end{bmatrix}$

**25** $L=\begin{bmatrix} -2.4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0.5 \\ 0 & 3.5 & 1 \end{bmatrix}$

**26** $W=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

**27** **رشاقة** تُدوِّن آراس عدد ساعات التمارين الرياضية التي تقوم بها، وعدد السعرات الحرارية التي تحرقها كل يوم. كم سعرة تحرق آراس في كل ساعة تمارس فيها كل نوع من التمارين؟ استعمل قاعدة كرامر للحل.

سجل ساعات تمارين آراس

| | ركوب الدراجة | كرة الطاولة | السباحة | السعرات المحروقة |
|---|---|---|---|---|
| الإثنين | 1.5 | 1 | 0.75 | 1620 |
| الأربعاء | 0.75 | | 1 | 915 |
| الجمعة | 1 | 1.5 | | 1320 |

**28** **تفكير ناقد** ما قيمة $c$ التي تجعل محدِّد مصفوفة معاملات النظام $\begin{cases} 2x+y=6 \\ cy=3-x \end{cases}$ يساوي صفرًا؟ أوضح كيف وجدت ذلك.

**29** **إنترنت** طلب أحد مواقع الإنترنت تقويم أحد الموضوعات بإعطائه نقطة أو نقطتين أو 3 نقاط. كان عدد المقوِّمين 38 شخصًا، وعدد من أعطوا 3 نقاط ضعف عدد من أعطوا نقطة واحدة . ما عدد الأشخاص الذين أعطوا كل تقويم، علمًا بأن العدد الكلّي للنقاط كان 85 ؟

جِد محدِّد كل مصفوفة.

**30** $A=\begin{bmatrix} x & x-1 \\ x+1 & x \end{bmatrix}$

**31** $B=\begin{bmatrix} x-2 & x+2 \\ x+2 & x+6 \end{bmatrix}$

**32** **معادن ثمينة** تبلغ كتلة قطعة نقود صغيرة من الفضة $2.268\ g$ وكتلة قطعة نقود كبيرة $5\ g$. مع أوميد 425 قطعة من النوعين. قاس كتلتها فكانت 1483 g.

أ كم قطعة من كل نوع مع أوميد؟

ب ما ثمن القطع الفضيّة إذا كان ثمن القطعة الصغيرة 30 000 دينار وثمن القطعة الكبيرة 72 000 دينار؟

**33** زارت حديقة الحيوانات مجموعة من 6 راشدين وَ 3 أولاد، ودفعت 000 48 دينار، في حين أن مجموعة تضمّنت اثنين من الراشدين وَ 10 أولاد دفعت 000 52 دينار. استعمل المجهول $x$ لثمن بطاقة الولد، والمجهول $y$ لثمن بطاقة الراشد.

أ اكتب نظام معادلات، يترجم المسألة.

ب اكتب مصفوفة العوامِل، واحسب محدِّدها.

ج كم حلاً للمسألة؟

د استعمل قاعدة كرامر لإيجاد قيمة كل من المجهولَيْن.

هـ ما ثمن بطاقة الدخول للراشدين؟ وثمن بطاقة الدخول للأولاد؟

**34** أي من الأوصاف يصح على النظام الخطّي $\begin{cases} 3x = y - 1 \\ x + 2y = 16 \end{cases}$ ؟

(أ) غير محدَّد؛ عدد غير محدود من الحلول (ج) مستحيل؛ لا حلول

(ب) مستحيل؛ كثير من الحلول (د) محدَّد؛ حل وحيد

**35** أي مصفوفة محدِّدها 1؟

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (ج) $\begin{bmatrix} -3 & 11 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

**36** **جواب مختصر** جِد قيمة $x$ علمًا بأن $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 25$ .

## نظرة إلى الوراء

**37** **استهلاك** كان مع سافان 000 135 دينار عندما دخلت محل أحذية نسائية ووجدت حذاء خفِّض ثمنه بنسبة 25%. اكتب متباينة يحقِّقها السعر الأصلي للحذاء علمًا بأن سافان قد اشترته.

**حُل نظام المعادلات بالتعويض.**

**38** $\begin{cases} x = \frac{1}{3}y \\ 6x - 6y = 16 \end{cases}$

**39** $\begin{cases} x + y = -5 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

**40** $\begin{cases} 2x = y \\ 4x + y = -2 \end{cases}$

## نظرة إلى الأمام

**41** **مدنيات** جرى استفتاء سكان مدينة مكوَّنة من قسمين، جنوبي وشمالي، بشأن إنشاء نصب تذكاري في ساحة المدينة. يُلخِّص الجدول المقابل نتائج ذلك الاستفتاء بالنسب المئوية. كم مواطنًا من القسم الجنوبي أعطى رأيه، علمًا بأن عدد المستفتين كان 826 4 شخصًا؟

| نتائج الاستفتاء | | |
|---|---|---|
| القسم | مع النصب | ضدّه |
| الشمالي | 47% | 53% |
| الجنوبي | 85% | 15% |
| المجموع | 49% | 51% |

# التفاضل Differential

الدروس

1. المشتقة الأولى
2. المشتقة الثانية
3. تطبيقات الاشتقاق

**ما السرعة؟**
تستطيع استعمال التفاضل لحساب سرعة جسم متحرّك عند كل لحظة من حركته.

# المشتقة الأولى

## 1st Derivative

**لماذا؟**

يستعمل الاقتصاديون المشتقّة كأداة من أدوات التحليل الاقتصادي.

**الأهداف**

- يجد مشتقّة دالّة بتطبيق القواعد الأولى للاشتقاق.

**المفردات**
**Vocabulary**

الميل Slope
المشتقّة Derivative
المشتقّة الأولى Firstderivative
المشتقّة الثانية Second derivative

يستعمل الاقتصاديون الرياضيات لإيجاد نماذج تساعد على دراسة مختلف أنواع النشاط الاقتصادي، كالإنتاج والمبيعات والأرباح وغيرها. إذا اتخذنا مثلاً مؤسسة تنتج نوعًا من الأدوات البسيطة، وحاولنا إيجاد نموذج لكلفة الإنتاج، نجد أن كلفة الإنتاج تتألف من جزءين: جزء ثابت لا يتغيّر مهما تكن الكمية المُنتجة وجزء متغيّر بتغيّر هذه الكمية. لنرمز بالحرف $F$ إلى الجزء الثابت من كلفة الإنتاج، وبالحرف $x$ لعدد الوحدات المُنتجة. فإذا كانت كلفة إنتاج الوحدة الواحدة تساوي $m$ نستطيع أن نكتب $C=mx+F$ ، حيث يُمثّل $C$ كلفة الإنتاج الكلّية.

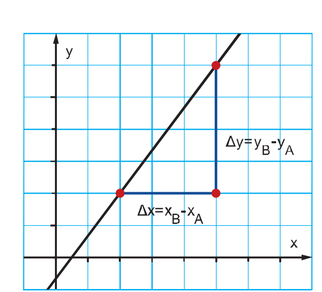
إذا كان إنتاج 100 وحدة يساوي 500 000 دينار، فما هو تأثير إنتاج وحدة إضافية على كلفة الإنتاج الكلّية؟ من الواضح أن إنتاج وحدة إضافية يزيد الكلفة الكلّية للإنتاج 5 000 دينار. يُسمّي أهل الاقتصاد هذه الزيادة **الكلفة الهامشية** للإنتاج.

اقتصرت الكلفة الهامشية للإنتاج في المثال السابق على كلفة إنتاج وحدة واحدة $m$. لكن الأمر ليس كذلك في حالات أخرى يكون فيها النموذج الرياضي لكلفة الإنتاج الكلّية دالّة غير خطّية (تربيعيّة مثلاً). سوف تتعلم في هذا الصف مفاهيم ومهارات تسمح لك بحل هذه المسألة وغيرها من المسائل الأخرى.

إذا عدنا إلى المثال السابق، نجد أن كلفة الإنتاج الهامشية $m$ هي مَيل المستقيم $C=mx+F$ الذي يُشكّل نموذج الكلفة الكلّية للإنتاج. ويُمكن النظر إليها على أنها نسبة التغيّر في كلفة الإنتاج إلى التغيّر في الكمّية المُنتجة، أي أن:

$$m=\frac{C_2-C_1}{x_2-x_1}=\frac{\Delta C}{\Delta x}$$ (اقرأ «دلتا» الحرف اليوناني △)

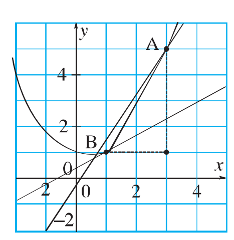
إذا نظرت إلى الرسم المقابل، ترى مستقيمًا يمر في نقطتين $A$ و $B$. تعرف أن ميل المستقيم هو $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ أي أنه يساوي نسبة التغيّر في قيمة $y$ إلى التغيّر في قيمة $x$.
وتعرف أن الميل هو نفسه أيًّا تكن النقطتان $A$ و $B$ على المستقيم. لكن، هل تساءلت ما هو ميل خط منحنٍ مثل بيان الدالّة $y=x^2$ ؟



لا يمكن تعريف ميل بيان الدالّة $y=x^2$ بالطريقة السابقة، لأنه خط منحنٍ. غير أن أهل الرياضيات حلّوا معضلة هذه الدالة وغيرها من الدوال، عن طريق تعريف الميل عند كل نقطة من نقاطه.

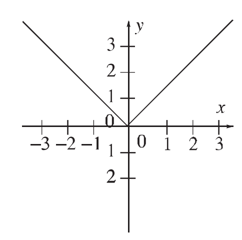
### ميل الدالّة عند نقطة من نقاط بيانها

- **ميل الدالة** أو بيانها عند النقطة $B$ من بيانها هو ميل مماس البيان عند هذه النقطة.




لتبرير هذا التعريف، ينطلق أهل الرياضيات من النقطة $B$ ومن نقطة $A$ قريبة منها على بيان الدالّة، ويرسمون المستقيم المار بالنقطتين، كما يرسمون مماس البيان عند النقطة $B$ (انظر الشكل المقابل).

افترض أن النقطة $B$ ثابتة، وأن النقطة $A$ تتحرَّك على البيان. إذا تخيّلت أن $A$ تتحرّك على البيان مقتربة من $B$، تجد أن المستقيم $A\ B$ يقترب من المماس باتجاه الاندماج به. تُعبّر عن ذلك بالقول أن المماس هو **نهاية** المستقيم $A\ B$، عندما تقترب $A$ من $B$. هذا يُبرِّر تعريف أهل الرياضيات لميل الدالّة $f$ عند النقطة $B$.




هل لكل دالّةٍ ميلٌ في أي نقطة من نقاط بيانها؟ الجواب لا. فإذا نظرت إلى بيان الدالّة $f(x)=|x|$ تجد أن لا مماس لبيانها عند النقطة $(0, 0)$. ينتج من ذلك أن ميل هذه الدالّة عند نقطة الأصل غير مُعرّف. إلا أن أكثرية الدوال التي ستتعاطى معها لها ميل عند كل نقطة من بيانها.

### مشتقّة الدالّة

- **مشتقّة الدالّة** $f$ هي الدالّة $f'$ التي تقرن كل قيمة من قيم $x$ بميل الدالّة عند النقطة $(x, f(x))$ إن كان مُعرفًا.

كيف تجد مشتقّة دالّة؟

لإيجاد مشتقّة دالّة، وضع أهل الرياضيات عدة قواعد، وبرهنوا صحّتها. سوف تتعلّم في هذا الفصل هذه القواعد، وكيف تستعملها.

### قاعدة مشتقّة الدالّة الثابتة

- الدالّة الثابتة دالّة تُكتب معادلتها على الصورة $f(x)=c$، حيث $c$ عدد حقيقي.
مشتقّة الدالّة الثابتة $f(x)=c$ هي الدالّة $f'(x)=0$ .

**مثال** 1 **إيجاد مشتقّة دالّة ثابتة**

جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=-3$

**الحل**

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة الدالّة الثابتة، أن تكتب: $f'(x)=0$ .

**حاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\sqrt{3}$

### قاعدة مشتقّة الدالّة الخطّية

- مشتقّة الدالّة الخطّية $f(x)=ax+b$ هي الدالّة $f'(x)=a$

**مثال** 2 **إيجاد مشتقّة دالّة خطّية**

جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\pi x-\sqrt{2}$

**الحل**

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة الدالّة الخطّية، أن تكتب: $f'(x)=\pi$ .

**حاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{2}{3}$

**دالّة القوة** هي دالّة تُكتب قاعدتها على الصورة $f(x)=x^n$ ، حيث $n$ عدد صحيح موجب.

### قاعدة مشتقّة دالّة القوّة

- مشتقّة الدالّة $f(x)=x^n$ هي الدالة $f'(x)=nx^{n-1}$

**مثال** 3 **إيجاد مشتقّة دالّة قوّة**

جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=x^5$

**الحل**

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة دالّة القوّة، أن تكتب: $f'(x)=5x^{5-1}=5x^4$ .

**حاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=x^{12}$

يُمكن توسيع قاعدة مشتقّة دالّة القوّة إلى الدوال $f(x)=x^p$ ، حيث $p$ عدد نسبي سالب أو موجب.

### القاعدة الموسّعة لمشتقّة دالّة القوّة

- مشتقّة الدالّة $f(x)=x^p$ ، حيث $p$ عدد نسبي، هي الدالة $f'(x)=px^{p-1}$ .

**مثـــال 4** إيجاد مشتقّة دالّة قوّة

جِد مشتقّة الدالّة أ $f(x)=\frac{1}{x}$ ب $g(x)=\sqrt{x}$

**الحـل**

ابدأ بكتابة كل دالّة على صورة دالّة قوّة: $f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$ وَ $g(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$.

يُمكنك، بالاستناد إلى القاعدة الموسَّعة لمشتقّة دالّة القوّة، أن تكتب:

$f'(x)=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}$ وَ $g'(x)=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

**حـاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

### قاعدة مشتقّة ناتج الضرب في عدد حقيقي

- مشتقّة الدالّة $g(x)=af(x)$ هي الدالّة $g'(x)=af'(x)$ .

**مثـــال 5** إيجاد مشتقّة ناتج الضرب في عدد حقيقي

جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=-5\sqrt[5]{x^3}$

**الحـل**

ابدأ بكتابة الدالّة على صورة ناتج ضرب دالّة قوّة في عدد حقيقي: $f(x)=-5\sqrt[5]{x^3}=-5x^{\frac{3}{5}}$

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة ناتج الضرب في عدد حقيقي وقاعدة مشتقّة دالّة القوّة،

أن تكتب: $f'(x)=-5\left(x^{\frac{3}{5}}\right)'=-5\left(\frac{3}{5}\right)\left(x^{\frac{3}{5}-1}\right)=-3x^{-\frac{2}{5}}=-3\frac{1}{x^{\frac{2}{5}}}=\frac{-3}{\sqrt[5]{x^2}}$

**حـاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\frac{-4}{x^5}$

بما أن مشتقّة الدالّة هي دالّة بدورها، فمن الممكن إيجاد مشتقّتها. لذا تُسمّى مشتقّة الدالة **المشتقّة الأولى** وتُسمّى مشتقّة المشتقّة، **المشتقّة الثانية**.

### المشتقّة الثانية

- المشتقّة الثانية لدالّة $f$، هي مشتقّة مشتقّتها، وتُكتب $f''$، أي أن $f''(x)=(f')'(x)$ .

**مثـــال** 6 **إيجاد المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية**

جِد المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية للدالّة $f(x)=\frac{x^3}{6}$

**الحــل**

ابدأ بكتابة الدالّة على صورة ناتج ضرب دالّة قوّة في عدد حقيقي: $f(x)=\frac{x^3}{6}=\frac{1}{6}x^3$

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة ناتج الضرب في عدد حقيقي وقاعدة مشتقّة دالّة القوّة، أن تكتب:

$$f'(x)=\frac{1}{6}(x^3)'=\frac{1}{6}(3)\left(x^{3-1}\right)=\frac{1}{2}x^2$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'=\frac{1}{2}(x^2)'=\frac{1}{2}(2)(x^{2-1})=x$$

**حــاولْ** جِد المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية للدالّة $f(x)=\frac{-4}{x^5}$

# التمـــاريـــن

## التواصل في الرياضيات

1 وضِّح الفرق بين مَيل دالّة خطّية ومَيل دالّة غير خطّية.

2 أعطِ تبريرًا لتعريف مَيل دالة عند نقطة من نقاط بيانها.

## تمارين موجَّهة

**جِد مشتقّة كل دالّة.**

3 $f(x)=-\sqrt{5}$

4 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

5 $f(x)=\frac{5}{8}$

6 $f(x)=0$

7 $f(x)=3x-4$

8 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{5}{6}$

9 $f(x)=x$

10 $f(x)=x^{11}$

11 $f(x)=\frac{1}{x^3}$

12 $f(x)=\sqrt{x^5}$

13 $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

14 $f(x)=-\frac{1}{x^{11}}$

15 $f(x)=-\frac{1}{x^{-3}}$

16 $f(x)=3x+5$

17 $f(x)=3\sqrt{x}-4$

18 $f(x)=\frac{3}{x^4}$

## تمارين وتطبيقات

**جِد مشتقّة كل دالّة.**

19 $f(x)=3x^{\frac{2}{5}}$

20 $f(x)=3x^2$

21 $f(x)=\frac{9}{x^5}$

22 $f(x)=\frac{9}{\sqrt{x}}$

23 $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$

24 $f(x)=2\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$

**25** $f(x)=\frac{3x^2}{4}$ **26** $f(x)=\frac{2}{3\sqrt{x}}$ **27** $f(x)=9x^{-5}$

**28** $f(x)=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ **29** $f(x)=x\sqrt{x}$ **30** $f(x)=\frac{1}{2x^2\sqrt{x}}$

**31** جِد المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية للدالّة $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ .

**32** جِد المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية للدالّة $f(x)=\frac{x^6}{6}$ .

## نظرة إلى الوراء

**33** اكتب معادلة المستقيم الذي يمرّ في النقطتين $(0, 1)$ وَ $(3, 3)$ .

**34** حُلّ نظام المعادلتين الخطّيتين $\begin{cases} 2x=3y-3 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

**35** حُلّ النظام السابق باستعمال المصفوفات.

## نظرة إلى الأمام

**36** جِد مشتقّة كل من الدالّتين $f(x)=x^3$ وَ $g(x)=\sqrt{x^3}$ .

**37** استعمل دالتي التمرين السابق. اكتب معادلة الدالّة $h(x)=f(x)g(x)$
ومعادلة الدالّة $k(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
على صورة قوة من قوى $x$، جِد مشتقّة الدالّة $h$، وقارن ما حصلت عليه مع الدالّة $k$.
ماذا تستنتج حول مشتقّة الدالّة $f(x)g(x)$ ؟

# المشتقة الثانية

## 2nd Derivative

**الأهداف**

- يجد مشتقّة دالّة بتطبيق قواعد الاشتقاق.

**لماذا؟** تُستعمل المشتقتان الأولى والثانية لدراسة حركة جسم متحرِّك على خط مستقيم.

تعلّمت في الدرس السابق بعضًا من قواعد الاشتقاق. سوف تتعلم في هذا الدرس قواعد أخرى تساعدك على إيجاد مشتقّات مروحة واسعة من الدوال.

ترتبط القواعد التي سوف تتعلّمها في هذا الدرس بالعمليات التي تقوم بها على الدوال، مثل الجمع والطرح والضرب والقسمة.

إذا كانت $f$ وَ $g$ دالّتين، يمكنك جمعهما، بحيث يكون المجموع، ويُكتب $f+g$ ، هو الدالّة المُعرّفة بالمعادلة التالية:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

ويُمكنك تعريف الفرق بينهما، ويُكتب $f-g$، على أنه الدالّة المُعرّفة بالمعادلة:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

### قاعدة مشتقّة المجموع أو الفرق

تُحسب مشتقّة مجموع دالّتين أو الفرق بينهما وفقًا للقاعدة التالية:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

أو $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

**مثـــال 1** **إيجاد مشتقّة مجموع دالّتين**

جِد مشتقّة الدالّة $h(x)=3x^2-5x+4$

**الحــل**

ابدأ بكتابة الدالّة $h$ على صورة مجموع دالّتين $f$ وَ $g$. من الواضح أنه إذا كانت الدالّة $f(x)=3x^2$ ، وكانت الدالّة $g(x)=-5x+4$ ، فإن $h(x)=(3x^2)+(-5x+4)=f(x)+g(x)$

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة المجموع، أن تكتب: $h'(x)=f'(x)+g'(x)$.

وبما أن $f'(x)=6x$ وَ $g'(x)=-5$، فإن $h'(x)=6x-5$ .

**حـــاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=5x^4+3x-\sqrt{3}$

**مثـــــال** 2 **إيجاد مشتقّة فرق دالّتين**

جِد مشتقّة الدالّة $h(x)=3x^2-5x+4$

**الحـــل**

ابدأ بكتابة الدالّة $h$ على صورة فرق دالّتين $f$ وَ $g$. من الواضح أنه إذا كانت $f$ الدالّة $f(x)=3x^2$ ، وكانت $g$ الدالّة $g(x)=5x-4$ ، فإن $h(x)=(3x^2)-(5x-4)=f(x)-g(x)$

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة الفرق، أن تكتب: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$ .

وبما أن $f'(x)=6x$ وَ $g'(x)=5$ فإن $h'(x)=6x-5$ .

**حـــاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=2x^3-3x-5$

إذا كانت $f$ وَ $g$ دالّتين، يمكن ضربهما، بحيث يكون ناتج الضرب، ويُكتب $fg$، هو الدالّة المُعرّفة بالمعادلة التالية:

$$(fg)(x)=f(x)\times g(x)=f(x)g(x)$$

**قاعدة مشتقّة ناتج الضرب**

تُحسب مشتقّة ناتج ضرب دالّتين وفقًا للقاعدة التالية:

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

**مثـــــال** 3 **إيجاد مشتقّة ناتج ضرب دالّتين**

جِد مشتقّة الدالّة $h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)$ .

**الحـــل**

ابدأ بكتابة الدالّة $h$ على صورة صورة ناتج ضرب دالّتين $f$ وَ $g$. من الواضح أنه إذا كانت $f$

$f(x)=\frac{1}{x}$ الدالّة وكانت $g$ الدالّة $g(x)=x^2+3$ ، فإن $h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)=f(x)g(x)$

احسب مشتقّة كل من هاتين الدالّتين.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=\left(x^{-1}\right)'=(-1)\left(x^{-2}\right)=-\frac{1}{x^2}$$

وَ $g'(x)=\left(x^2\right)'+(3)'=(2x)+(0)=2x$

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة ناتج الضرب، أن تكتب: $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ .

وبما أن $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ وَ $g'(x)=2x$ ، فإن:

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2+3)+\left(\frac{1}{x}\right)(2x)$$

أو $h'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)(x^2+3)+\left(\frac{1}{x}\right)(2x)=-1-\frac{3}{x^2}+2=1-\frac{3}{x^2}$

للتحقُّق، اضرب الدالّتين:

$$h(x)=\frac{1}{x}(x^2+3)=x+\frac{3}{x}=x+3\frac{1}{x}$$

ثم احسب مشتقّة الدالّة التي حصلت عليها.

$$h'(x)=\left(x+3\frac{1}{x}\right)'=(x)'+\left(3\frac{1}{x}\right)=1+3\left(\frac{1}{x}\right)'=1+3\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{3}{x^2}$$

**حـــاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\left(x^2+5\right)\sqrt{x}$

إذا كانت $f$ وَ $g$ دالّتين، يمكن قسمة إحداهما على الأخرى، بحيث يكون ناتج القسمة، ويُكتب $\frac{f}{g}$ ، هو الدالّة المُعرّفة بالمعادلة التالية:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

### قاعدة مشتقّة ناتج القسمة

تُحسب مشتقّة ناتج قسمة دالّتين وفقًا للقاعدة التالية:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

**مثـــــال** 4 **إيجاد مشتقّة ناتج قسمة دالّتين**

جِد مشتقّة الدالّة $h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

**الحـــل**

ابدأ بكتابة الدالّة $h$ على صورة ناتج قسمة دالّتين $f$ وَ $g$. من الواضح أنه إذا كانت الدالّة $f(x)=x^2-1$، وكانت الدالّة $g$ $g(x)=x^2+1$ ، فإن $h(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{f(x)}{g(x)}$

احسب مشتقّة كل من هاتين الدالّتين:

$$f'(x)=\left(x^2-1\right)'=\left(x^2\right)'-(1)'=(2x)-(0)=2x$$

وَ $g'(x)=\left(x^2+1\right)'=\left(x^2\right)'+(1)'=(2x)+(0)=2x$

يُمكنك، بالاستناد إلى قاعدة مشتقّة ناتج القسمة، أن تكتب: $h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$

وبما أن $f'(x)=2x$ وَ $g'(x)=2x$ ، فإن:

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\frac{(2x)(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

أو

$$h'(x)=\frac{(2x)\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1-\left(x^2-1\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

**حـــاولْ** جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\frac{x^2-2}{x+1}$ .

هناك العديد من الدوال التي تُكتب معادلتها على صورة قوّة دالّة أخرى. فالدالة $f(x)=\left(x^2+1\right)^4$ هي قوّة من قوى الدالّة $u(x)=x^2+1$ ، بحيث تُكتب على الصورة $f(x)=[u(x)]^4$ .

## قاعدة مشتقّة قوّة الدالّة

- إذا كانت الدالّة $f$ قوّة من قوى الدالّة $u$، أي $f(x)=[u(x)]^p$ حيث $p$ عدد نسبي، فإن مشتقّتها تُحسب وفقًا للقاعدة التالية:

$$f'(x)=pu'(x)[u(x)]^{p-1}$$

**مثـــــال** 5 **إيجاد مشتقّة قوّة الدالّة**

جِد مشتقّة كل من الدوال التالية:

أ $f(x)=(x^2+1)^4$ ب $f(x)=\frac{1}{x^3+2x+1}$ ج $f(x)=\sqrt{x^2-x+2}$

**الحـــل**

ابدأ في كل حالة، بكتابة الدالّة على صورة قوّة دالّة أخرى محدِّدًا $u(x)$ وَ $u'(x)$ وَ $p$ .

أ $u(x)=x^2+1$ ؛ $u'(x)=2x$ ؛ $p=4$ . ينتج من ذلك:

$$f'(x)=pu'(x)[u(x)]^{p-1}=4(2x)\left(x^2+1\right)^3=8x\left(x^2+1\right)^3$$

ب $u(x)=x^3+2x+1$ ؛ $u'(x)=3x^2+2$ ؛ $p=-1$ . ينتج من ذلك:

$$f'(x)=pu'(x)[u(x)]^{p-1}=(-1)(3x^2+2)\left(x^3+2x+1\right)^{-2}=\frac{-3x^2-2}{\left(x^3+2x+1\right)^2}$$

ج $u(x)=x^2-x+2$ ؛ $u'(x)=2x-1$ ؛ $p=\frac{1}{2}$ . ينتج من ذلك:

$$f'(x)=pu'(x)[u(x)]^{p-1}=\frac{1}{2}(2x-1)\left(x^2-x+2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}}$$

**حـــاولْ** جِد مشتقّة كل من الدوال التالية:

أ) $f(x)=(x^3+4x^2+2)^5$ ب) $f(x)=\frac{1}{x^4+2x^2+2}$ ج) $f(x)=\sqrt{x^6-2}$

# التمارين

## التواصل في الرياضيات

1. وضِّح كيف تستعمل قواعد مشتقّة المجموع، ومشتقّة الضرب في عدد حقيقي، ومشتقّة القوة، لتبيِّن أن مشتقّة الدالّة الخطّية $f(x)=ax+b$ هي $f'(x)=a$ .

2. استعمل قواعد الاشتقاق لتبيِّن أن مشتقّة الدالّة التربيعية $f(x)=ax^2+bx+c$ هي $f'(x)=2ax+b$ .

## تمارين موجَّهة

3. جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=5x^2+\frac{2}{x^3}$

4. جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

5. جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=2x^3-\frac{1}{x^2}+5$

6. جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=(x^2+2x)\sqrt{x+1}$

7. جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=\frac{5x^3+x-1}{x^2+1}$

8. جِد مشتقّة الدالّة $f(x)=(5x^2+3x+5)^7$

## تمارين وتطبيقات

**جِد مشتقّة كل دالّة.**

9. $f(x)=x^2-\frac{1}{x^2}$

10. $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}$

11. $f(x)=2\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[5]{x}}$

12. $f(x)=\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+1}$

13. $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\frac{6}{\sqrt{x}}+1\right)$

14. $f(x)=\sqrt{x-1}\,\sqrt[3]{x-2}$

15. $f(x)=\frac{x^3-2x}{x-1}$

16. $f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{x+1}$

17. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+5}}{x^2+1}$

18. $f(x)=\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^3$

19. $f(x)=\sqrt{3x^2-5x+2}$

20. $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2$

21. **إدارة المخزون** تُستعمل الدالّة $A(q)=\frac{km}{q}+cm+\frac{hq}{2}$ كنموذج لإدارة المخزون في المخازن الكبرى. يُمثّل، في هذه الدالّة:

- $A$ متوسِّط كلفة تغذية المخزون أسبوعيًّا.
- $q$ الكمية المشتراة.
- $k$ كلفة طلب الشراء.
- $c$ ثمن شراء حبّة واحدة.
- $m$ عدد الوحدات المشتراة.
- $h$ كلفة تخزين الحبّة الواحدة.

جِد المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية للدالّة $A$.

**22** **مشبك ورق** تستطيع بسهولة أن تقذف مشبك ورق إلى أعلى في الهواء، باستعمال شريط مطاطي. تُستعمل الدالة $h(t)=39.2t-4.9t^2$ لتحديد ارتفاع المشبك (بالأمتار) بعد $t$ ثانية من إطلاقه. تُعبّر مشتقّة هذه الدالّة $h'(t)$ عن سرعة المشبك عند اللحظة $t$.

أ جِد سرعة المشبك عند اللحظة $t$. ما سرعته عندما $t=3$ ، $t=4$ ، $t=5$؟

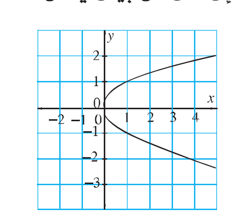
ب ما سرعة المشبك عندما يبلغ أعلى ارتفاع له قبل أن يبدأ بالهبوط؟ استعمل جوابك لتجد كم ثانية استغرق وصول المشبك إلى أعلى ارتفاع. ما هو هذا الارتفاع الأعلى؟

ج على سطح القمر، تُستعمل الدالة $h(t)=39.2t-0.79625t^2$ لتحديد ارتفاع المشبك (بالأمتار) بعد $t$ ثانية من إطلاقه. ما سرعة المشبك عندما يبلغ أعلى ارتفاع له قبل أن يبدأ بالهبوط؟ استعمل جوابك لتجد كم ثانية استغرق وصول المشبك إلى أعلى ارتفاع. ما هو هذا الارتفاع الأعلى؟

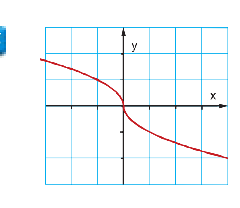
## نظرة إلى الوراء

**اذكر إن كان كل بيان يُمثّل دالّة أم لا. علّل جوابك.**

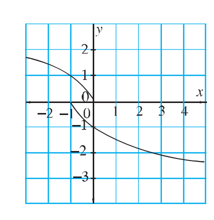
**23**



**24**



**25**



**26** أي من الدوال التالية دالّة تربيعية؟

أ $f(x)=1-2x+x^3$

ب $f(x)=1+\frac{1}{x^2+1}$

ج $f(x)=2x3+4x^2$

د $f(x)=1-2x$

## نظرة إلى الأمام

**27** دالّة الموقع لجسم يتحرّك على خطّ مستقيم هي $s(t)=t^3-3t+50$ ، حيث تُقاس المسافة بالأمتار والزمن بالدقائق. بعد كم دقيقة تصبح سرعة الجسم صفرًا؟ ما موقع الجسم عندها؟

الدرس 3

# تطبيقات الاشتقاق

## Applications of Derivative

**لماذا؟** تُستعمل المشتقة الأولى لإيجاد زاوية الإطلاق لكي تصل القذيفة إلى أبعد مسافة ممكنة.

يُستعمل الاشتقاق في مجالات عدة. سوف نتطرق إلى استعمالاته في ثلاثة مجالات: التمثيل البياني، تحرُّك جسم، مجال الاقتصاد.

**الأهداف**

- يستعمل الاشتقاق لإيجاد المقياس الهامشي لمقياس اقتصادي.
- يستعمل الاشتقاق لإيجاد معادلة مماس الدالّة في نقطة معيّنة.
- يستعمل الاشتقاق لإيجاد سرعة وتسارع جسم يتحرّك على خط مستقيم.

تعلّمت أن مشتقّة الدالّة $f$ عند نقطة $P$ من بيانها هي ميل مماس البيان عند هذه النقطة. فإذا عرفنا مشتقّة الدالّة عند $P$، عرفنا ميل هذا المماس. تستعمل عندها صورة الميل – النقطة وإحداثيي $P$ لإيجاد معادلة المماس.

**مثــــال 1** **إيجاد معادلة مماس القطع المكافئ عند نقطة من نقاطه**

جِد معادلة مماس القطع المكافئ $f(x)=0.3x^2-2x+5$ عند النقطة $p$ التي إحداثيّها الأول $x=6$ .

**الحـــل**

صورة الميل – النقطة لمعادلة المستقيم هي $y-y_1=m(x-x_1)$.

لدينا $x_1=6$ وَ $y_1=f(6)=3.8$ . لحساب ميل المماس، نجد مشتقّة الدالّة $f(x)=0.3x^2-2x+5$ ونحسب قيمتها عندما $x=6$ .

$$f'(x)=(0.3x^2)'-(2x)'+(5)'=0.3(x^2)'-2(x)'+(5)'=0.3(2x)-2(1)+(0)=0.6x-2$$

قيمة المشتقّة عندما $x=6$ هي $f'(6)=0.6(6)-2 = 3.6-2=1.6$ ميل المماس إذن، يساوي 1.6.

استعمل الآن صورة الميل – النقطة لمعادلة المستقيم

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-3.8=1.6(x-6)$$
$$y=1.6x-5.8$$

معادلة مماس القطع المكافئ $y=0.3x^2-2x+5$ عند النقطة $P(6, 3.8)$ هي $y=1.6x-5.8$ .

**حـــاولْ** جِد معادلة مماس القطع المكافئ $f(x)=2x^2+3x-6$ عند النقطة $P$ التي إحداثيّها الأول $x=1$ .

## مثـــــال 2 إيجاد معادلة مماس القطع المكافئ والعمود عليه عند نقطة من نقاطه

جِد معادلة المماسِّ والعمود عليه عند النقطة $P$، التي إحداثيّها الأول $x=-2$ ، على بيان القطع المكافئ.

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2$$

### الحــل

صورة الميل – النقطة لمعادلة المستقيم هي $y-y_1=m(x-x_1)$ .

لدينا $x_1=-2$ وَ $y_1=f(-2)=-2$ .لحساب ميل المماس، علينا أن نجد مشتقّة الدالّة $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2$ وحساب قيمتها عندما $x=-2$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2\right)'+(x)'-(2)'=\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+1-0=\frac{1}{2}(2x)+1=x+1$$

قيمة المشتقّة عندما $x=-2$ هي $-2+1=-1$ . ميل المماس إذن، يساوي $-1$.

استعمل الآن صورة الميل – النقطة لمعادلة المستقيم.

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$
$$y-(-2)=-1(x-(-2))$$
$$y=-x-4$$

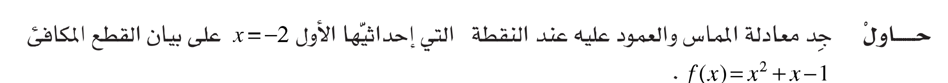
معادلة مماس القطع المكافئ $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-2$ عند النقطة $P(-2,-2)$ هي $y=-x-4$ .

لإيجاد معادلة العمود، جِد ميله أولاً. بما أن ناتج ضرب ميل المماس وميل العمود يساوي $-1$، وبما أن ميل المماس هو$-1$، فإن ميل العمود هو 1.

استعمل الآن صورة الميل – النقطة لمعادلة العمود:

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$
$$y-(-2)=1\left(x-(-2)\right)$$
$$y=x$$

معادلة العمود عند النقطة $P(-2,-2)$ هي $y=x$ .



**حـــاولْ** جِد معادلة المماس والعمود عليه عند النقطة التي إحداثيّها الأول $x=-2$ على بيان القطع المكافئ $f(x)=x^2+x-1$ .

عندما يتحرّك جسم في مسار مستقيم، فإن الدالّة $s=f(t)$ التي تحدِّد موقعه في كل لحظة $t$ تُسمّى **دالّة الموقع**. المشتقّة الأولى لهذه الدالّة هي سرعة الجسم المتحرّك عند اللحظة $t$. أما المشتقّة الثانية فهي تسارع الجسم، أي ما يدل على كيفية تغيّر سرعته تزايدًا أو تناقصًا. أبسط الحركات هي حركة جسم على خط مستقيم بسرعة ثابتة لا تتغيّر بتغيُّر الزمن. دالّة الموقع لمثل هذه الجسم هي دالّة خطّية تُكتب على الصورة التالية: $s(t)=vt+s_0$ . $s_0$ هي قيمة هذه الدالّة عندما $t=0$ ، أي أنها تمثّل موقع الجسم عند الانطلاق. من ناحية أخرى، مشتقّة هذه الدالّة هي $s'(t)=v$ ، أي أن السرعة التي يتحرّك بها الجسم ثابتة. تسارع هذا الجسم المتحرك هو المشتقّة الثانية لدالّة الموقع، أي $s''(t)=(v)'=0$ ، أي أن سرعة الجسم لا تتغيّر، وهذا متوقّع لأن سرعة الجسم ثابتة.

يستعمل المهندسون كلمتي «السرعة» و«التسارع» للتعبير عن المشتقّة الأولى والمشتقّة الثانية للدوال التي تصف حركة الأجسام. للاقتصاديين أيضًا تعابيرهم الخاصة في هذا المجال. فهم يستعملون تعبير «الهامشي».

يدرس الاقتصاديون عددًا من الدوال منها دالّة الكلفة $C(x)$ ، وهي دالّة بدلالة عدد الوحدات المنتجة $x$ .

**الكلفة الهامشية** هي الكلفة الإضافية الناتجة من إنتاج وحدة إضافية. يعتبر الاقتصاديون مشتقة دالّة الكلفة قيمة تقريبية مقبولة للكلفة الهامشية؛ ويعتمدون هذه المشتقة كتعريف رياضي للكلفة الهامشية.

## مثال 3 الكلفة الهامشية والمدخول الهامشي

افترض أن الدالّة $C(x)=x^3-6x^2+15x+100$ هي دالّة الكلفة (بآلاف الدنانير) لإنتاج $x$ برّادًا صغيرًا، عندما يتراوح مستوى الإنتاج بين 8 برّادات وَ 30 برّادًا. وأن الدالّة $R(x)=x^3-3x^2+12x$ هي دالّة المدخول (بآلاف الدنانير) الناتج من بيع $x$ برّادًا. ما كلفة إنتاج برّاد إضافي إذا كان مستوى الإنتاج هو 10 برّادات يوميًّا؟ وكم سيزيد المدخول عند بيع 11 برّادًا في اليوم؟

**الحل**

الكلفة الإضافية لإنتاج برّاد إضافي، عند مستوى الإنتاج 10 برّادات يوميًّا، هي قيمة مشتقّة دالّة الكلفة عندما $x=10$ .

$$C'(x)=\left(x^3\right)'-\left(6x^2\right)'+(15x)'+(100)'=3x^2-12x+15$$

$$C'(10)=3(10)^2-12(10)+15=300-120+15=195$$

الكلفة الإضافية لإنتاج براد إضافي عند مستوى الإنتاج 10 برّادات يوميًّا هي 195 ألف دينار.

المدخول الإضافي الناتج من بيع 11 برّادًا عوضًا عن 10، هو المدخول الهامشي، أي قيمة مشتقّة دالّة المدخول عندما $x=10$ .

$$R'(x)=\left(x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(12x)'=3x^2-6x+12$$

$$R'(10)=3(10)^2-6(10)+12=252$$

المدخول الإضافي لبيع برّاد إضافي، عند مستوى الإنتاج 10 برّادات يوميًّا هو 252 ألف دينار.

**حاولْ** افترض أن الدالّة $C(x)=2x^3-3x^2+5x+160$ هي دالّة الكلفة (بآلاف الدنانير) لإنتاج $x$ سريرًا عندما يتراوح مستوى الإنتاج بين 7 أسرَّة وَ 20 سريرًا. وأن الدالّة $R(x)=2x^3-3x^2+12x$ هي دالّة المدخول (بآلاف الدنانير) الناتج من بيع $x$ سريرًا. ما كلفة إنتاج سرير إضافي، إذا كان مستوى الإنتاج هو 10 أسرّة يوميًّا؟ وكم سيزيد المدخول عند بيع 11 سريرًا في اليوم؟

# التمـــــاريـــن

## التواصل في الرياضيات

1 ما الذي يجعل الاقتصاديين يعتبرون مشتقّة دالّة الكلفة تقريبًا مقبولاً لحساب الكلفة الهامشية؟

## تمارين موجَّهة

**جِد مشتقّة كل دالّة.**

2 جِد ميل مماس بيان الدالّة $f(x)=x^3+3x-1$ عند النقطة التي إحداثيّها الأوّل $x=1$ .

3 دالّة الموقع لجسم يتحرّك على خط مستقيم هي $s(t)=t^4-3t^2+2$ . جِد موقع الجسم وسرعته وتسارعه بعد 7 ثوانٍ من انطلاقه.

4 ما الكلفة الهامشية لدالّة الكلفة $C(x)=x^3-2x^2+3x+50$ ، عند مستوى الإنتاج $x=8$؟

## تمارين وتطبيقات

5 جِد ميل مماس بيان الدالّة $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ عند النقطة التي إحداثيّها الأول $x=2$ .

6 جِد الإحداثيّ الأوّل للنقطة الواقعة على بيان الدالّة $f(x)=x^4+2$ ، حيث ميل المماس يساوي 0.

7 جِد معادلة مماس الدالّة $f(x)=(x+1)^3+2$ ، عند النقطة التي إحداثيّها الأول $x=-1$ .

8 جِد معادلة المماس والعمود لبيان الدالّة $f(x)=2\left(x^2-3x+1\right)$ ، عند النقطة التي إحداثيّها الأول $x=3$ .

9 جِد معادلة المماس والعمود لبيان الدالّة $f(x)=x^4$ ، عند النقطة $(-1, 1)$ .

10 افترض أن دالّة الكلفة بآلاف الدنانير لإنتاج غسّالات هي $C(x)=2000+100x-0.1x^2$ .

أ تم إنتاج 100 غسّالة. ما متوسّط كلفة إنتاج الغسّالة الواحدة؟

ب جِد الكلفة الهامشية عند مستوى الإنتاج 100 غسّالة.

ج احسب كلفة إنتاج 101 غسّالة، وكلفة إنتاج 100 غسّالة، واستنتج كلفة إنتاج الغسّالة الإضافية. قارن ما توصّلت إليه مع الكلفة الهامشية. هل استعمال المشتقّة لحساب قيمة تقريبية للكلفة الهامشية أمر مقبول؟

**11** افترض أن دالّة المدخول بآلاف الدنانير لبيع غسّالة هي $R(x)=20000\left(1-\frac{1}{x}\right)$

أ تم بيع 100 غسالة. ما متوسط المدخول الناتج عن بيعها.

ب جِد المدخول الهامشي عند مستوى الإنتاج 100 غسّالة.

ج احسب مدخول بيع 101 غسّالة ومدخول بيع 100 غسّالة. واستنتج الزيادة الناتجة من بيع غسّالة إضافية. قارن ما توصّلت إليه مع المدخول الهامشي. هل استعمال المشتقّة لحساب قيمة تقريبية للمدخول الهامشي أمر مقبول؟

## نظرة إلى الوراء

**12** جِد إحداثيّات النقاط التي تقع على بيان الدالّة $f(x)=x^3-3x+2$ حيث ميل المماس يساوي 0.

جِد معادلة المماس عند كل من هذه النقاط.

## نظرة إلى الأمام

**13** ماذا تقول عن دالّة مشتقّتها دالّة ثابتة؟